



# UNIVERSIDAD NACIONAL DE PIURA

## Escuela de Posgrado

### ACTA DE SUSTENTACIÓN

#### MAESTRÍA EN MATEMÁTICA APLICADA

Los Miembros del Jurado Calificador que suscriben, reunidos para la sustentación de la Tesis, para optar el Grado Académico de Magister en **MATEMÁTICA APLICADA** presentada por:

**ANASTACIO SANDOVAL – JOSE ELIHU**

Con el asesoramiento del M.Sc. FLABIO ALFONSO GUTIERREZ SEGURA, denominada:

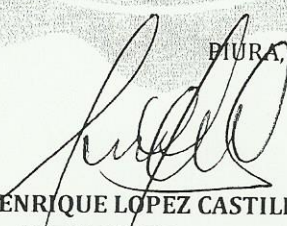
**“DINÁMICA DEL MÉTODO DE NEWTON EN LA CONSTRUCCIÓN DE UN CONJUNTO DE INICIALIZACIÓN PARA HALLAR LAS RAÍCES DE POLINOMIOS DE VARIABLES COMPLEJA”**

Oídas las respuestas y absueltas las observaciones formuladas, se declara:


APROBADO				DESAPROBADO
<i>Excelente</i>	<i>Sobresaliente</i>	<i>Bueno</i>	<i>Aceptable</i>	
_____	_____✓_____	_____	_____	_____

En consecuencia, previa aprobación del Art.º 83, del Reglamento General de la Escuela de Posgrado, queda en condiciones de ser calificado **APTO** para obtener el Grado Académico de **MAGISTER EN MATEMÁTICA APLICADA**. De conformidad con lo estipulado en la ley.

PIURA, LUNES 21 DE MARZO DEL 2016.

  
DR. JULIO ENRIQUE LOPEZ CASTILLO  
PRESIDENTE

  
DR. RAMON FRANCISCO CHIRINOS ZAMORA  
SECRETARIO

  
M.Sc. SEGUNDO BASILIO CORREA ERAZO  
VOCAL

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE PIURA**  
**ESCUELA DE POSTGRADO**  
**SECCIÓN DE CIENCIAS**



**PROGRAMA DE MAESTRÍA EN**  
**MATEMÁTICA APLICADA**

**DINÁMICA DEL MÉTODO DE NEWTON EN LA**  
**CONSTRUCCIÓN DE UN CONJUNTO DE INICIALIZACIÓN**  
**PARA HALLAR LAS RAÍCES DE POLINOMIOS DE**  
**VARIABLE COMPLEJA**

**TESIS**

**PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGISTER EN**  
**MATEMÁTICA APLICADA**

**José Elihú Anastacio Sandoval**

**Piura – Perú**

**Marzo – 2016**

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE PIURA**  
**ESCUELA DE POSTGRADO**  
**SECCIÓN DE CIENCIAS**



**PROGRAMA DE MAESTRÍA EN**  
**MATEMÁTICA APLICADA**

DINÁMICA DEL MÉTODO DE NEWTON EN LA CONSTRUCCIÓN DE  
UN CONJUNTO DE INICIALIZACIÓN PARA HALLAR LAS RAÍCES DE  
POLINOMIOS DE VARIABLE COMPLEJA

**APROBADA EN CONTENIDO Y ESTILO POR**

---

**Dr. Julio Enrique López Castillo**  
**PRESIDENTE**

---

**Dr. Ramón Chirinos Zamora**  
**SECRETARIO**

---

**Lic. Segundo Basilio Correa Erazo, M.Sc.**  
**VOCAL**

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE PIURA**  
**ESCUELA DE POSTGRADO**  
**SECCIÓN DE CIENCIAS**



**PROGRAMA DE MAESTRÍA EN**  
**MATEMÁTICA APLICADA**

**TESIS**

DINÁMICA DEL MÉTODO DE NEWTON EN LA CONSTRUCCIÓN DE  
UN CONJUNTO DE INICIALIZACIÓN PARA HALLAR LAS RAÍCES DE  
POLINOMIOS DE VARIABLE COMPLEJA

*Los suscritos declaran que el presente trabajo de tesis es original en su  
contenido y forma*

---

Lic. José Elihú Anastacio Sandoval

EJECUTOR

---

Lic. Flabio Gutiérrez Segura, M.Sc

ASESOR



A

*Miriam*

# AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, a Jehová Dios por su guía moral y espiritual en mi vida; a mis padres José y Rosa, y a mi hermana Libby por su apoyo de múltiples formas que permitieron concentrarme en escribir esta tesis; a Miriam, cuya forma peculiar de ver las cosas influye positiva y profundamente en mi desarrollo profesional y como persona.

Agradezco también a mi asesor de tesis, Lic. Flabio Gutiérrez, M.Sc., por las sugerencias dadas en el desarrollo de este trabajo. A la Dr. Sonia Casós por darse el tiempo de revisar el formato del mismo; a los miembros del jurado calificador: Dr. Julio López, Dr. Ramón Chirinos y Lic. Segundo Correa, M.Sc., por su tiempo invertido en la revisión y corrección de esta tesis.

Finalmente, doy gracias a todos los profesores del programa de maestría en matemática aplicada de la UNP que contribuyeron a mi formación académica.

El autor

# **DINÁMICA DEL MÉTODO DE NEWTON EN LA CONSTRUCCIÓN DE UN CONJUNTO DE INICIALIZACIÓN PARA HALLAR LAS RAÍCES DE POLINOMIOS DE VARIABLE COMPLEJA**

Marzo 2016

**Lic. José Elihú Anastacio Sandoval**

Tesis para obtener el grado académico de magister en matemática aplicada por la  
Universidad Nacional de Piura.

## **RESUMEN**

Al aplicar el método de Newton en el plano complejo, se observa que existen puntos muy próximos entre sí pero cuyas órbitas exhiben comportamientos muy diferentes al aplicarles repetidas veces el método en cuestión. Esto dificulta la elección de puntos del plano complejo que sirvan como conjunto de inicialización de tal método. Dado que el conjunto de inicialización, o denominado también *conjunto semilla*, influye significativamente en la eficiencia computacional del método, es crucial construir un conjunto de cardinal mínimo en el que se asegure la convergencia a cada una de las raíces. Esto puede lograrse mediante el estudio de la dinámica global de este método, pues de esta forma se puede determinar qué puntos del plano complejo tienen un comportamiento caótico al aplicarles el método de Newton, para así evitarlos.

Por esa razón, se describe en primer lugar la geometría de las cuencas inmediatas de atracción de Newton, es decir, la región del plano complejo cuyos puntos convergen a una raíz del polinomio y que incluye a esta raíz. Una vez alcanzado este objetivo, se exponen tres enfoques en la construcción del conjunto de inicialización:

El enfoque determinista, el probabilístico y el híbrido (que combina ambos); el primero de ellos se basa en el hecho de que en los exteriores de la circunferencia unitaria centrada en el origen, el mapeo de Newton es prácticamente lineal y además coloca por lo menos un punto en cada canal de la raíz (un canal es la cuenca de atracción inmediata de una raíz pero en el exterior de la circunferencia unitaria). En cambio, el probabilístico se basa en la distinción de raíces anchas y delgadas: coloca un punto por lo menos en cada canal de una raíz ancha, y por lo menos uno en la unión de canales de una raíz delgada. El tercero, coloca todos los puntos del conjunto semilla en una sola circunferencia haciendo pequeños desfases si todas las raíces no son halladas.

A continuación se elabora un algoritmo llamado *AlgNewton*, implementado en un software científico, el cual toma un polinomio y da como resultado sus raíces junto con su multiplicidad.

**Palabras Claves:** *Método de Newton, enfoque determinístico, enfoque probabilístico*



**DINÁMICA DEL MÉTODO DE NEWTON EN LA CONSTRUCCIÓN DE UN  
CONJUNTO DE INICIALIZACIÓN PARA HALLAR LAS RAÍCES DE POLINOMIOS  
DE VARIABLE COMPLEJA**

Marzo 2016

**Lic. José Elihú Anastacio Sandoval**

Tesis para obtener el grado académico de magister en matemática aplicada por la  
Universidad Nacional de Piura.

**ABSTRACT**

By applying Newton's method in the complex plane, it shows that there are very close to each other but points whose orbits exhibit very different behaviors by repeatedly applying the method in question. This makes the choice of points in the complex plane to serve as a set of initialization of such a method. Since the set of initialization, or also called seed set, significantly influences the computational efficiency of the method is crucial to build a set of minimum cardinal in which ensure convergence to each of the roots. This can be achieved by studying the global dynamics of this method, because that way you can determine which points of the complex plane have a chaotic to apply Newton's method, in order to avoid behavior.

For this reason, first it described the geometry of the basins of attraction immediate Newton, ie the region of the complex plane whose points converge to a root of the polynomial and including this root. Once achieved this goal, three approaches are described in building the set of initialization: The deterministic approach, probabilistic and hybrid (combining both); The first one is based on the fact that on the outside of the unit circle centered at the origin, mapping Newton is practically linear and also

places at least one point in each root channel (a channel is the basin immediate attraction of a root but outside the unit circle). Instead, the probability is based on the distinction of wide and thin roots places a point at least on each channel of a wide root, and at least one channel bonding a thin root. The third place all the seed points set on a single circumference by small gaps if all the roots are not found.

Then an algorithm called AlgNewton, implemented in a scientific software, which takes a polynomial and its roots results along with its multiplicity is made.

**Keywords:** Newton method, deterministic approach, probabilistic approach

# Tabla de contenido

AGRADECIMIENTOS.....	v
RESUMEN.....	vi
ABSTRACT .....	viii
Índice de Tablas .....	xii
Índice de Figuras .....	xiii
LISTA DE SÍMBOLOS .....	xv
INTRODUCCIÓN.....	1
1 CAPÍTULO I.....	10
1.1 CONCEPTOS BÁSICOS DE VARIABLE Y DINÁMICA COMPLEJA .....	10
1.1.1 PUNTOS FIJOS DE UNA FUNCIÓN RACIONAL .....	14
1.1.2 CICLOS DE UNA FUNCIÓN RACIONAL.....	20
1.1.3 PUNTOS CRÍTICOS DE UNA FUNCIÓN RACIONAL .....	23
1.2 LOS CONJUNTOS DE JULIA Y FATOU .....	26
1.3 CONCEPTOS BÁSICOS DE GEOMETRÍA CASI CONFORME .....	29
2 CAPÍTULO 2.....	34
2.1 INTRODUCCIÓN.....	34
2.2 EL PROBLEMA DE CAYLEY .....	34
2.3 ALGORITMOS GENERALMENTE CONVERGENTES Y EL MÉTODO DE NEWTON.....	43
2.4 PROPIEDADES ELEMENTALES DEL MÉTODO DE NEWTON .....	55
2.5 ESTRUCTURA DE LAS CUENCAS DE ATRACCIÓN.....	67
3 CAPÍTULO 3.....	84
3.1 INTRODUCCIÓN.....	84
3.2 LOS CANALES DE UNA RAÍZ Y LAS R – ÓRBITAS CENTRALES .....	86
3.3 EL ENFOQUE DETERMINISTA .....	91
3.4 EL ENFOQUE PROBABILÍSTICO .....	105
3.5 EL ENFOQUE HÍBRIDO.....	116
4 CAPÍTULO 4.....	121
4.1 INTRODUCCIÓN.....	121

4.2	CONSTRUCCIÓN DEL ALGORITMO .....	121
4.2.1	Elaboración del conjunto semilla $S_d$ .....	122
4.2.2	Normalización de las raíces del polinomio .....	123
4.2.3	Detección de la multiplicidad de la raíz.....	124
4.2.4	Criterios de detención.....	127
4.2.5	Detección de aproximaciones duplicadas .....	128
4.2.6	Aspectos adicionales .....	129
4.3	ESTIMACIÓN DE LA COMPLEJIDAD COMPUTACIONAL .....	131
	CONCLUSIONES .....	133
	RECOMENDACIONES.....	135
	ANEXO.....	136
5	Referencias Bibliográficas .....	140



# Índice de Tablas

<i>Tabla 3-1 Diversas construcciones del conjunto semilla .....</i>	<i>85</i>
<i>Tabla 3-2 Valores Interpolados de <math>\tau</math> para una circunferencia.....</i>	<i>102</i>

# Índice de Figuras

<i>Figura 0 - 1 Desventajas del método de Newton.....</i>	<i>4</i>
<i>Figura 0 - 2 Método de Newton aplicado al polinomio <math>p(z)=-2 z^5+2z - 1</math> sobre un dominio rectangular del plano complejo. Cada color representa una raíz diferente .....</i>	<i>7</i>
<i>Figura 1-1 Dos familias de curvas en un rectángulo .....</i>	<i>31</i>
<i>Figura 1-2 Dos familias de curvas en un anillo.....</i>	<i>33</i>
<i>Figura 2-1 Original paper Newton – Fourier Imaginary Problem .....</i>	<i>35</i>
<i>Figura 2-2 Cuencas de atracción de un polinomio cuadrático.....</i>	<i>40</i>
<i>Figura 2-3 Cuencas de atracción de Newton y conjunto de Julia para <math>z^2 + 1 - i z - 5i</math> .....</i>	<i>41</i>
<i>Figura 2-4 Implementación del comando Cuencas en Mathematica 10.0 .....</i>	<i>42</i>
<i>Figura 2-5 Cuencas de atracción de <math>z^3 - 1</math> .....</i>	<i>43</i>
<i>Figura 2-6 Cuencas de atracción de <math>z^3 - 2z + 2</math>.....</i>	<i>45</i>
<i>Figura 2-7 Cuencas de Atracción de <math>1 - z + z^3 - 16z^7</math> .....</i>	<i>54</i>
<i>Figura 2-8 Condiciones para <math>N_p(z) &gt; 1</math>.....</i>	<i>74</i>
<i>Figura 2-9 Cuencas de atracción de <math>-2z^5 + 2z - 1</math> .....</i>	<i>76</i>
<i>Figura 2-10 No acotamiento de las cuencas de atracción.....</i>	<i>78</i>
<i>Figura 2-11 Accesos a infinito.....</i>	<i>82</i>
<i>Figura 2-12 Geometría Global del método de Newton .....</i>	<i>83</i>
<i>Figura 3-1 Estimación del módulo de un canal de <math>N_p</math> aplicado a un polinomio de grado 5.....</i>	<i>87</i>
<i>Figura 3-2 Relación entre <math>R, \kappa</math> y <math>d</math> .....</i>	<i>92</i>

<i>Figura 3-3 Valores permitidos para <math>\kappa</math></i> .....	94
<i>Figura 3-4 Estimación del mínimo cardinal de <math>S_d</math></i> .....	96
<i>Figura 3-5 Número de circunferencias vs. grado del polinomio</i> .....	99
<i>Figura 3-6 Mínimo de circunferencias y puntos en <math>S_d</math></i> .....	101
<i>Figura 3-7 Conjuntos <math>HS_{15}</math> y <math>SS_{15}</math></i> .....	104
<i>Figura 3-8 Raíces anchas y delgadas</i> .....	105
<i>Figura 3-9 Valor mínimo del grado <math>d</math> para la elección <math>M = 1/\ln \ln d</math></i> .....	114
<i>Figura 3-10 Cardinales de <math>SPS_d</math> y <math>DPS_d</math></i> .....	115
<i>Figura 3-11 Diversas generaciones del conjunto <math>HDS_d</math>. Observe que los puntos de una generación son diferentes de los de la anterior</i> .....	118
<i>Figura 3-12 Generación inicial y dos primeras generaciones del conjunto <math>HDS_{22}</math></i> ..	119
<i>Figura 3-13 Diversas generaciones del conjunto <math>HPS_d</math></i> .....	120
<i>Figura 4-1 Diagrama de flujo de AlgNewton</i> .....	130
<i>Figura 4-2 Complejidades computacionales de <math>SS_d</math> y <math>HSP_d</math></i> .....	131
<i>Figura 4-3 Comparación de cardinales de diferentes definiciones de <math>S_d</math></i> .....	132

# LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \hat{\mathbb{C}}, \emptyset$	Los naturales, enteros, reales, complejos, complejos ampliados y el vacío
$\mathbb{S}^1, \mathbb{D}^1, \mathfrak{R}_d, \mathbb{P}_d, \mathbb{P}_d^1$	La circunferencia y disco unitarios en el plano, el conjunto de funciones racionales de grado $d$ , el espacio de polinomios de grado $d$ y el espacio de polinomios de grado $d$ con raíces en $\mathbb{D}^1$
$\lceil, \lceil, \lfloor, \lfloor$	Redondeo, redondeo por exceso y por defecto
$\circ, f _A, N_p, id$	Composición de funciones, restricción de una función a un conjunto, mapeo de Newton y función identidad.
$\bigwedge_a b, \bigvee_a b$	Para todo $a$ se cumple $b$ y existe un $a$ que cumple $b$
$\cup, \cap, -, \subset$	Unión, intersección, diferencia teórica (la diferencia usual) e inclusión propia
$\bigcup, \bigcap, \uplus$	Unión, intersección y unión disjunta generalizadas
$  , \#$	Módulo de un complejo y cardinal de un conjunto
$A^\circ, A', \bar{A}, \partial A, A^c$	Interior, conjunto derivado, clausura, frontera y complemento del conjunto $A$
$\approx_M, f^{(n)}, f^n, grad$	Conjugación topológica bajo $M$ , $n$ -ésima derivada, $n$ -ésima iterada y grado de un polinomio.
$\mathcal{F}, \mathcal{J}$	Los conjuntos de Fatou y Julia.



# INTRODUCCIÓN

La búsqueda de las raíces de un polinomio es un problema muy antiguo en matemáticas, un problema que ha sido fuente de grandes disputas como la que ocurrió entre Cardano y Tartaglia allá por los siglos XVI de nuestra era. Tras el éxito que se obtuvo al encontrar fórmulas que resolvieran las ecuaciones polinómicas de grado 1, 2 y 3, se trató de encontrar fórmulas que permitieron resolver ecuaciones de grado más elevado. Descartes dio el siguiente paso en 1637 al encontrar la fórmula que resolvía la ecuación de cuarto grado. No obstante, los esfuerzos para conseguir fórmulas similares para ecuaciones polinómicas de grado 5, en el caso general, estaban condenadas al fracaso. En 1824 se publica el *teorema de Abel – Ruffini* que establece que no hay una fórmula general en términos de raíces para las ecuaciones de quinto grado sobre los racionales; mediante un número finito de sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y extracciones de raíces. Tal resultado es válido para grados superiores (Grillet, 2007).

Los métodos numéricos ofrecen una solución alterna a este problema. En (Chapra & Canale, 2007), se puede encontrar varios de tales métodos que resuelven la ecuación  $f(x) = 0$ . El más sencillo de ellos consiste en graficar la función y determinar dónde cruza, aproximadamente, al eje de las abscisas. Este punto, que representa el valor de  $x$  para el cual  $f(x) = 0$ , es la raíz. Aunque los métodos gráficos son útiles en la

obtención de estimaciones de las raíces, tienen el inconveniente de que son poco precisos. Un método alternativo es el de prueba y error. Esta “técnica” consiste en elegir un valor de  $x$  y evaluar si  $f(x)$  es cero. Si no es así (como sucederá en la mayoría de los casos) se hace otra elección y se evalúa nuevamente  $f(x)$  para determinar si el nuevo valor ofrece una mejor aproximación de la raíz. El proceso se repite hasta que se obtenga un valor que proporcione una  $f(x)$  cercana a cero. Estos métodos fortuitos, evidentemente, son ineficientes e inadecuados para abordar el caso complejo.

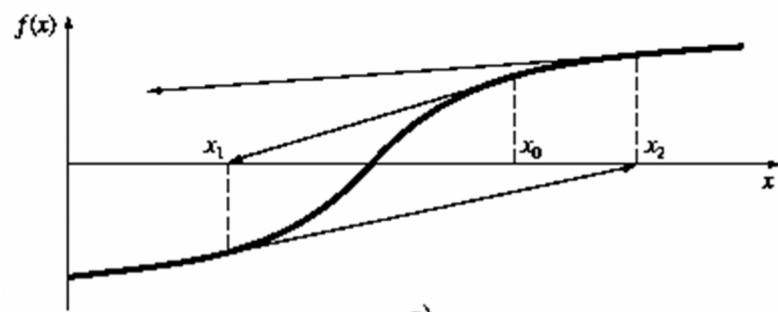
Existen técnicas alternativas que no sólo aproximan sino que emplean estrategias sistemáticas para dirigirse a la raíz verdadera. En (Chapra & Canale, 2007), se distinguen dos tipos de tales estrategias: los *métodos cerrados*, donde la raíz se encuentra dentro de un intervalo predeterminado por un límite inferior y otro superior, y los *métodos abiertos*, que se basan en fórmulas que requieren únicamente de un solo valor de inicio  $x_0$  o que empiecen con un par de ellos, pero que no necesariamente encierran la raíz. Éstos, algunas veces divergen o se alejan de la raíz verdadera a medida que se avanza en la iteración. Sin embargo, cuando los métodos abiertos convergen, en general lo hacen mucho más rápido que los métodos cerrados.

Entre estos últimos, el método de Newton (o Newton – Raphson como también se denomina) sea, tal vez, el más ampliamente utilizado. En la mayoría de los casos, nos ofrece un mecanismo eficiente para hallar las raíces de un polinomio  $p$  en  $\mathbb{R}[x]$ , es decir, el anillo de polinomios en una indeterminada con coeficientes reales. Esto se logra mediante un proceso iterativo de la ecuación

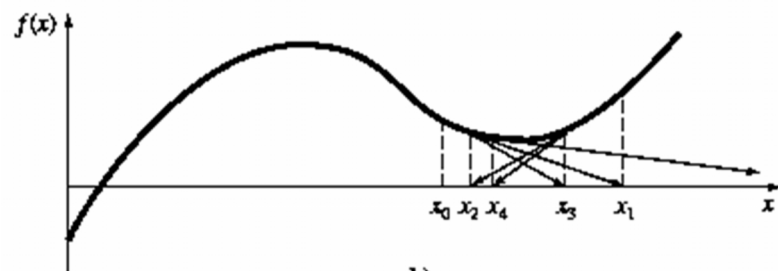
$$x_{n+1} = x_n - \frac{p(x_n)}{p'(x_n)}; x_0 = x(0); n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

, donde  $x_0$  es el valor de inicialización de la iteración. Quizá, la única dificultad en este caso es la determinación de este valor  $x_0$ , pues su elección influenciará en la convergencia de la sucesión  $\{x_n\}$  hacia una de las raíces del polinomio  $p(x)$ .

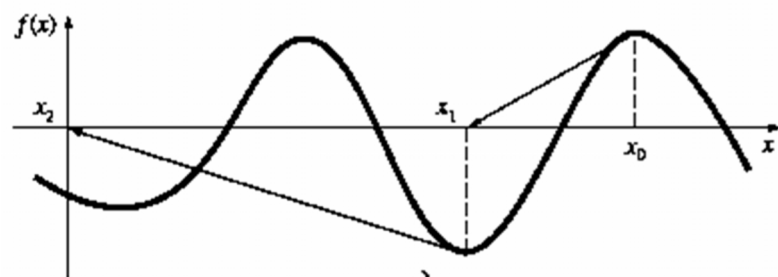
Aunque en general el método de Newton es eficiente, hay situaciones donde fracasa. Una de ellas corresponde a raíces múltiples (Ralston & Rabinowitz, 2001). Sin embargo, también cuando se trata de raíces simples, se encuentran dificultades. Por ejemplo, a veces ocurre convergencia lenta debido a la naturaleza de la función. Además, es posible que se presenten otros problemas, como los que se muestran en la Figura 0 - 1.



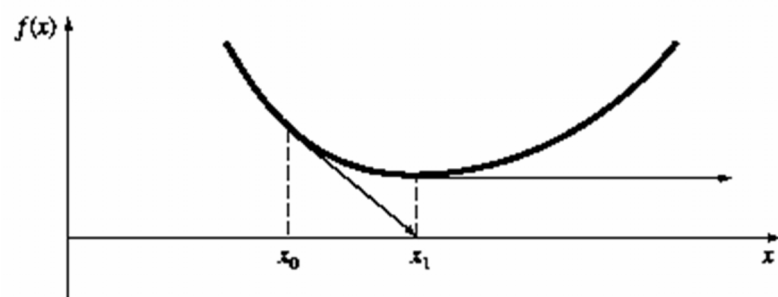
a)



b)



c)



d)

**Figura 0 - 1 Desventajas del método de Newton**

**Fuente:** (Chapra & Canale, 2007)



Por ejemplo, la Figura 0.1a muestra el caso donde un punto de inflexión ocurre en la vecindad de una raíz. Observe que las iteraciones que empiezan con  $x_0$  divergen progresivamente de la raíz. En la Figura 0.1b se ilustra la tendencia del método de Newton a oscilar alrededor de un mínimo o máximo local. Tales oscilaciones pueden persistir o, como en la Figura 0.1b, alcanzar una pendiente cercana a cero, después de lo cual la solución se aleja del área de interés. En la Figura 0.1 c se muestra cómo un valor inicial cercano a una raíz salta a una posición varias raíces más lejos. Esta tendencia a alejarse del área de interés se debe a que se encuentran pendientes cercanas a cero. En efecto, una pendiente cero es un verdadero desastre, ya que causa una división entre cero en la fórmula de Newton. De manera que no hay un criterio general de convergencia para este método. Su convergencia depende de la naturaleza de la función y de la exactitud del valor inicial.

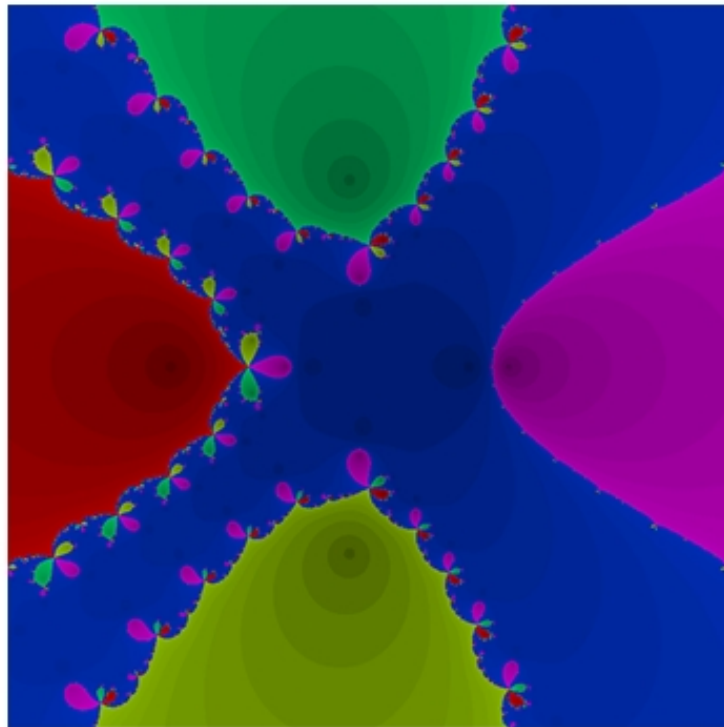
La solución en estos casos, aunque puede haber excepciones, es tener un valor inicial que sea “suficientemente” cercano a la raíz. Los buenos valores iniciales por lo común se predicen con un conocimiento del problema físico o mediante el uso de recursos alternativos, tales como las gráficas o algoritmos cerrados de búsqueda de raíces, que proporcionan mayor claridad en el comportamiento de la solución. Ante la falta de un criterio general de convergencia se propone el diseño de programas computacionales eficientes que reconozcan la convergencia lenta o la divergencia. Para lograrlo, Chapra (Chapra & Canale, 2007), sugiere que el programa se podría mejorar incorporando algunas consideraciones adicionales:

- Se debe incluir una rutina de graficación en el programa.
- Al final de los cálculos, se necesitará sustituir siempre la raíz final calculada en la función original, para determinar si el resultado se acerca a cero. Esta prueba protege el desarrollo del programa contra aquellos casos en los que se presenta convergencia lenta u oscilatoria, mientras que la solución aún está muy lejos de una raíz.
- El programa deberá incluir siempre un límite máximo permitido del número de iteraciones para estar prevenidos contra soluciones oscilantes, de lenta convergencia o divergentes que podrían persistir en forma interminable.
- El programa deberá alertar al usuario para que tome en cuenta la posibilidad de que  $f'(x)$  sea igual a cero en cualquier momento durante el cálculo.

El caso  $p \in \mathbb{C}[z]$  presenta aún más dificultades, principalmente porque el plano complejo no es un conjunto dotado de un orden total. Si aplicamos el método de Newton a una muestra aleatoria del plano obtenemos gráficos como el que se muestra en la Figura 0 - 2, la cual se obtuvo al aplicar dicho método al polinomio  $p(z) = -2z^5 + 2z - 1$ . Para obtener la gráfica, se codificó cada una de las raíces con un color determinado. Las regiones de un mismo color corresponden a puntos del plano complejo que al aplicarles el mapeo de Newton, las sucesiones resultantes convergen a una misma raíz. Estas regiones se llaman *cuencas de atracción* de la raíz. La cuenca que contiene a la raíz se llama la *cuenca inmediata*. Las diferentes gradaciones de un mismo color dentro de una misma cuenca indica la tasa de rapidez con la que la sucesión definida por la iteración del método de Newton, con el punto

$z_0$  como valor inicial, se aproxima a la raíz buscada. Una gradación más oscura indica una convergencia más rápida.

En los bordes de las regiones más grandes se observa un patrón fractal, lo cual representa una dificultad adicional para el caso complejo: existen puntos muy próximos entre sí que convergen a raíces diferentes.



**Figura 0 - 2 Método de Newton aplicado al polinomio  $p(z) = -2z^5 + 2z - 1$  sobre un dominio rectangular del plano complejo. Cada color representa una raíz diferente**

Entonces, surge la interrogante: ¿cómo se debe muestrear el plano para asegurarnos que al aplicar el método de Newton a dicha muestra se obtengan todas las raíces del polinomio? En (Benedetti & Petronio, 2003) se muestra que es posible hacer una identificación del plano complejo ampliado  $\hat{\mathbb{C}}$  con la esfera de Riemann (ver (Milnor,

2006) para una discusión detallada sobre la dinámica de mapeos iterados, como el de Newton, sobre esta superficie). Adoptando este enfoque, al observar la proyección sobre la esfera de Riemann, se observa que las cuencas de atracción inmediatas convergen a infinito a través de unos “canales”, llamados *accesos a infinito* de la cuenca de atracción, simplemente conexos, que convergen a  $\infty$  (Hubbard, Schleicher, & Sutherland, 2001). La geometría de dichas cuencas de atracción inmediatas juega un rol crucial en la resolución de esta interrogante y nos permiten contruir un conjunto finito de puntos, al que llamaremos conjunto de inicialización, que al aplicarles el método de Newton aseguran la formación de sucesiones convergentes a cada una de las raíces del polinomio.

El presente trabajo se desarrolla de la siguiente manera: En el capítulo 1, se enuncian sin demostración los resultados necesarios para la descripción de la geometría global del método. El lector interesado puede consultar (Ahlfors, by, Shishikura, & Hubbard, 2006), (Milnor, 2006), (Beardon, 2000), (Nevanlinna & Paatero, 1982) y (Plaza Salinas, 2013) para los detalles de las demostraciones.

En el capítulo 2, se estudia la dinámica global del método y además se analiza la existencia de conjuntos de medida positiva cuyos puntos no convergen a ninguna de las raíces del polinomio.

En el capítulo 3, se abordan dos enfoques en la construcción del conjunto de inicialización: El enfoque determinístico, desarrollado en (Hubbard, Schleicher, & Sutherland, 2001) y (Schleicher, On the efficient global dynamics of Newton's Method for complex polynomials, 2013); y el probabilístico, propuesto en (Bollobás, Lackmann, & Schleicher, 2013). También se discute un método práctico para el enfoque determinístico y se determina a partir de qué grado un enfoque es más

conveniente que el otro en términos de su número de elementos. Se exponen además, los llamados métodos híbridos donde los puntos van rotando en una sola circunferencia o se colocan aleatoriamente sobre esta.

Finalmente, en el capítulo 4, se implementa el algoritmo *AlgNewton* tomando en consideración la forma de detectar cuándo una órbita converge a una raíz ya hallada. Adicionalmente, una de las características de este algoritmo es que detecta la multiplicidad de la raíz al observar el valor de la derivada del mapeo de Newton en las proximidades de un cero del polinomio.

# CAPÍTULO I

## PRELIMINARES

### 1.1 CONCEPTOS BÁSICOS DE VARIABLE Y DINÁMICA COMPLEJA

En este trabajo utilizaremos la esfera de Riemann como modelo para el plano complejo ampliado  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Además trabajaremos con polinomios en  $\mathbb{C}[z]$ . La exposición de esta sección sigue muy de cerca a (Plaza Salinas, 2013).

#### **Definición 1.1**      *Funciones Racionales*

Una función racional  $R: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  es una función de la forma  $R(z) := \frac{P(z)}{Q(z)}$ ,

donde  $P$  y  $Q$  son polinomios coprimos, es decir, sin factores comunes.

El *grado* de  $R$  se denota y define como  $\text{grad}(R) := \max\{\text{grad}(P), \text{grad}(Q)\}$

Al conjunto de funciones racionales de grado  $k$  lo denotaremos mediante  $\mathfrak{R}_k$

La  $n$ –ésima iteración  $R^n$  de  $R \in \mathfrak{R}_k$  se define de forma recursiva mediante

$$R^2 := R \circ R; R^3 := R \circ R \circ R; \dots; R^n := R^{n-1} \circ R$$

De este modo,  $\text{grad}(R^n) = (\text{grad } R)^n$ .

### **Definición 1.2**      **Órbita de un punto bajo $R$**

Sea  $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ . Definimos la órbita futura de  $z_0$  mediante

$$\text{orb}_R^+(z_0) := \{z_n \in \hat{\mathbb{C}} : z_n = R^n(z_0) \wedge n \in \mathbb{Z}^+\}.$$

Cada uno de los elementos de  $\text{orb}_R^+(z_0)$  se denominan iterados de  $z_0$  bajo  $R$

Si permitimos que  $n \in \mathbb{Z}$  escribimos simplemente  $\text{orb}(z_0)$ .

Serán de mucha importancia en nuestro estudio un tipo especial de funciones racionales denominadas transformaciones de Möbius.

**Definición 1.3      Transformaciones de Möbius**

*Las transformaciones de Möbius son las funciones racionales de grado 1.*

*Tales transformaciones tienen la forma*

$$M(z) = \frac{az+b}{cz+d}; \quad ad-bc \neq 0 \quad (1.1)$$

*donde  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ .*

Sea  $M(z)$  como en (1.1).  $R(z) = \infty \Leftrightarrow z = -\frac{d}{c}$  y  $z = \infty \Leftrightarrow M(z) = \frac{a}{c}$ , por lo

que  $M(z)$  da una transformación uno a uno de  $\hat{\mathbb{C}}$  en sí mismo. Bajo una transformación de Möbius, una circunferencia se transforma en una circunferencia de  $\hat{\mathbb{C}}$  (una recta en  $\hat{\mathbb{C}}$  es una circunferencia que pasa por  $\infty$ ); y una geodésica en el plano o la esfera, se transforma en una circunferencia de  $\hat{\mathbb{C}}$  (Nevanlinna & Paatero, 1982).

Las transformaciones de Möbius constituyen el grupo de homeomorfismos analíticos de  $\hat{\mathbb{C}}$  en sí mismo y pueden ser utilizadas para la noción de conjugación.

**Definición 1.4      Conjugación topológica**

*Sean  $R, Q \in \mathfrak{R}_k$ . Se dice que  $R$  y  $Q$  son conjugadas si y sólo si existe una transformación de Möbius  $M$  tal que  $Q = M \circ R \circ M^{-1}$ .*



Escribiremos  $R \simeq_M Q$  para indicar conjugación de  $R$  y  $Q$  bajo  $M$ . Se omitirá el índice cuando no haya riesgo de confusión.

La importancia de la conjugación topológica entre dos funciones racionales es que conserva la estructura dinámica de las funciones conjugadas en el sentido de que envía los puntos fijos y periódicos de una a los de la otra y, en general, transforma la órbita de un punto  $z_0$  del dominio de la primera función en la órbita de su imagen en la segunda. En particular, podemos usar una transformación afín para transformar las raíces de un polinomio sin modificar cualitativamente la dinámica del método de Newton (ver teorema 2.1 para un ejemplo).

### **Teorema 1.1**

Sea  $T(z) = az + b$ ,  $a \neq 0$ . Dado el polinomio  $p(z)$ ,  $N_p(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z)}$ .

Definamos  $q(z) := p(T(z))$ , entonces  $N_q \simeq_T N_p$

Otro aspecto resaltante de la conjugación es su comportamiento al ser iterada:

Si  $Q \simeq_M R$  entonces  $Q^n \simeq_M R^n$ .

Estudiar la dinámica de  $R$  significa estudiar el comportamiento de las órbitas de los puntos sobre los cuales actúa  $R$ . En una situación ideal, en el caso que

nos concierne, cuando  $R$  representa a  $N_p$ , las sucesiones de iterados convergerán a cada una de las raíces de  $p$ . No obstante, en la sección 2.3 se muestra que hay regiones, de medida positiva inclusive, donde los iterados no convergen a las raíces. Esto nos lleva a preguntarnos sobre qué tipo de propiedades topológicas exhibe el conjunto de puntos límites de  $orb_R^+(z_0)$ .

Resulta que para responder a esta interrogante sobre el comportamiento dinámico de  $R$ , hay que analizar el comportamiento de algunos puntos especialmente importantes: los puntos fijos, los ciclos y los puntos críticos.

### 1.1.1 PUNTOS FIJOS DE UNA FUNCIÓN RACIONAL

#### **Definición 1.5** *Punto fijo*

*Un punto  $z_0 \in Dom f$  es un punto fijo de  $f$  si y sólo si  $f(z_0) = z_0$ .*

Para el caso particular de una función racional  $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ , el punto  $z = \infty$

es un punto fijo si y sólo si  $grad(P) > grad(Q)$ . El resto de puntos fijos son las soluciones de la ecuación  $P(z) - zQ(z) = 0$ . Asociado a un punto fijo, tenemos el concepto de su multiplicidad.

**Definición 1.6      Multiplicidad de un punto fijo**

Sea  $z_0 \in \mathbb{C}$  un punto fijo de  $R \in \mathfrak{R}_d$ . Decimos que  $z_0$  tiene multiplicidad  $m$  si

$z_0$  es una raíz de multiplicidad algebraica  $m$  de la ecuación

$G(z) = R(z) - z = 0$ , es decir, si  $\bigwedge_{j=0, \dots, m-1} G^{(j)}(z_0) = 0$  pero  $G^{(m)}(z_0) \neq 0$ . En el

caso  $m = 1$ , diremos que  $z_0$  es un cero simple de  $R$ .

Escribiremos  $\text{mult}_R(z_0) = m$  para indicar la multiplicidad del punto fijo  $z_0$  con respecto a la función  $R$ . Cuando no haya riesgo de confusión, escribiremos  $\text{mult}(z_0) = m$

Los puntos fijos de una función de variable compleja se clasifican del siguiente modo:

**Definición 1.7      Clasificación de puntos fijos**

Sea  $z_0$  un punto fijo de una función  $R(z)$  con multiplicador asociado

$\lambda = R'(z_0)$ . Entonces  $z_0$  se denomina

- Súper atractor, si  $\lambda = 0$
- Atractor, si  $0 < |\lambda| < 1$
- Repulsor, si  $|\lambda| > 1$
- Indiferente, si  $|\lambda| = 1$

*En este último caso, los puntos indiferentes se clasifican en racionalmente indiferentes (o también llamados parabólicos) e irracionalmente indiferentes dependiendo si el número  $\alpha$  en  $\gamma = e^{2\pi i \alpha}$  es racional o irracional respectivamente.*

El número de puntos fijos que puede poseer una función racional viene dado por el siguiente teorema

### **Teorema 1.2**

*Una función  $R \in \mathfrak{R}_k$  tiene exactamente  $k+1$  puntos fijos contando con sus multiplicidades.*

Dado que  $\infty \in \hat{\mathbb{C}}$ , para calcular su multiplicidad empleamos la transformación

de Möbius  $M(z) = \frac{1}{z}$ , la cual lleva el punto  $z = \infty$  al origen.

**Definición 1.8      Multiplicidad de infinito**

Sea  $R \in \mathfrak{R}_d$  y  $S(z) = M \circ R \circ M^{-1}(z)$  con  $M(z) = \frac{1}{z}$ . Entonces

$$\text{mult}_R(\infty) := \text{mult}_S(0)$$

En el caso de un punto fijo atractor y súper atractor, tenemos la siguiente definición que captura la esencia de sus denominaciones.

**Definición 1.9      Cuenca de atracción de un punto fijo**

Sea  $z_0$  un punto fijo de una función  $f$ . La cuenca de atracción de  $z_0$  se denota y define como  $U(z_0) := \left\{ z \in \widehat{\mathbb{C}} : \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z) = z_0 \right\}$ . La cuenca de atracción inmediata  $U_{z_0}$  es la componente conexa de  $U(z_0)$  que contiene a  $z_0$ .

El siguiente teorema, llamado el teorema de *linealización de Koenigs*, proporciona un panorama de la conducta local de los iterados de una función holomorfa  $f$  en las vecindades de puntos atractores y repulsores.

### Teorema 1.3

Sea  $f : S \rightarrow S$  un mapeo holomorfo de una superficie de Riemann  $S$  en sí misma.

Si  $z_0$  es un punto fijo atractor de  $f$  cuyo multiplicador satisface  $|\lambda_{z_0}| \neq 0$ , entonces existe un mapeo holomorfo  $w : U_{z_0} \rightarrow \mathbb{C}$ , con  $w(z_0) = 0$ , de modo que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} U_{z_0} & \xrightarrow{f} & U_{z_0} \\ \downarrow w & & \downarrow w \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{\lambda_{z_0}} & \mathbb{C} \end{array}$$

Al mismo tiempo,  $w$  transforma difeomórficamente una vecindad de  $z_0$  en una vecindad de  $0$ .  $w$  es única excepto por la multiplicación por una constante.

Si  $z_0$  es un punto repulsor de  $f$ , entonces existe un mapeo holomorfo  $\mathbb{E} : \mathbb{C} \rightarrow S$ , de modo que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f} & S \\ \uparrow \mathbb{E} & & \uparrow \mathbb{E} \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{\lambda_{z_0}} & \mathbb{C} \end{array}$$

Además,  $\mathbb{E}$  transforma difeomórficamente una vecindad de  $0$  en una vecindad de  $z_0$ .  $\mathbb{E}$  es única excepto por la multiplicación por una constante.

Para el comportamiento de los iterados alrededor de puntos súper atractores, tenemos el siguiente teorema, llamado *teorema de Böttcher*.

#### **Teorema 1.4**

Sea  $f(z) = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \dots$ , donde  $n \geq 2$  y  $a_n \neq 0$ . Entonces existe un cambio local holomorfo de coordenadas  $w = w(z)$  que conjuga a  $f$  con el mapeo  $g(w) = w^n$ , es decir, satisface  $g = w \circ f \circ w^{-1}$ . Además,  $w$  es única excepto por la multiplicación de una  $n-1$  ésima raíz de la unidad.

Consideremos ahora un punto fijo aislado  $z_0 \neq \infty$  del mapeo holomorfo  $f$ .

#### **Definición 1.10      Índice holomorfo**

El índice holomorfo de  $f$  en  $z = z_0$  es el residuo

$$I(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z - f(z)}$$

donde integramos en una pequeña circunferencia alrededor del origen.

Si  $z_0 = \infty$ , empleamos la transformación  $M(z) = \frac{1}{z}$ . Entonces, el índice

holomorfo de  $f$  en  $z = \infty$  es igual al residuo de  $M \circ f \circ M^{-1}$  en el origen.

El siguiente teorema describe de manera global a los índice holomorfos de los puntos fijos (§9 de (Milnor, 2006))

### **Teorema 1.5**

*Para cualquier función racional  $R: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ ,  $R(z) \neq z$ , se cumple que*

$$\sum_{R(z)=z} z(R, z) = 1 \quad (1.2)$$

*En el caso de un punto fijo simple, con multiplicador  $\lambda \neq 1$ , el índice viene dado por*

$$z(R, z_0) = \frac{1}{1 - \lambda} \quad (1.3)$$

*El índice holomorfo es un invariante analítico local, es decir, si  $Q = W \circ R \circ W^{-1}$ , donde  $W$  es un cambio de coordenadas holomorfo, entonces*

$$z(R, z_0) = z(Q, W(z_0)).$$

### **1.1.2 CICLOS DE UNA FUNCIÓN RACIONAL**

#### **Definición 1.11      *Punto Periódico y $n$ – ciclo***

*El punto  $z_0 \in \text{Dom } f$  se denomina periódico si  $\bigvee_{n \in \mathbb{N}} f^n(z_0) = z_0$ . Al menor valor de  $n$  se le denomina período de  $z_0$  y a la órbita de*



$r_n(z_0) := \{z_0, f(z_0), f^2(z_0), \dots, f^{n-1}(z_0)\}$  un punto periódico de período  $n$ , es decir, se le llama un  $n$ - ciclo o ciclo de longitud  $n$ .

Si  $n=1$ , el punto es fijo. Si denotamos mediante  $z_k := f^k(z_0), k = \overline{0, n-1}$ , con  $z_n = z_0$ , entonces, al igual que un punto fijo, podemos definir el concepto de *multiplicador de  $r_n$*  mediante  $\lambda_{r_n(z_0)} := (f^n(z_0))' = f'(z_1) f'(z_2) \dots f'(z_n)$ . Dado que el valor de este multiplicador no depende del punto del ciclo que se tome, escribiremos  $\lambda_{r_n}$  en vez de  $\lambda_{r_n(z_0)}$ .

Al igual que para puntos fijos, los  $n$ - ciclos también se clasifican en *súper atractores* ( $\lambda_{r_n} = 0$ ), *atractores* ( $0 < |\lambda_{r_n}| < 1$ ), *repulsores* ( $|\lambda_{r_n}| > 1$ ) e *indiferentes* ( $|\lambda_{r_n}| = 1$ ), y éstos en *racionalmente* o *irracionalmente indiferentes* dependiendo si  $\lambda_{r_n}$  es o no una raíz de la unidad.

La cuenca de atracción de un ciclo atractor se precisa como en la Definición 1.9 tomando  $f^n$  en lugar de  $f$ .

**Definición 1.12**      ***Cuenca de atracción de un punto periódico y de un ciclo***

Sea  $z_0$  un punto periódico de  $f$  de período  $k$  y  $r_k(z_0)$  su órbita correspondiente.

Se define la órbita de  $z_0$  como

$$U(z_0) := \left\{ z \in \widehat{\mathbb{C}} : \lim_{n \rightarrow \infty} f^{nk}(z) = z_0 \right\} \quad (1.4)$$

Y la órbita del ciclo mediante

$$U(r_k(z_0)) := \bigcup_{j=0}^{k-1} f^j(U(z_0)) = \bigcup_{j=0}^{k-1} U(f^j(z_0)) \quad (1.5)$$

Es decir, la cuenca de atracción de un ciclo puede ser vista como la unión de los puntos cuya órbita converge a algún punto del ciclo (primera igualdad de (1.5)) o como la unión de las cuencas de atracción de cada uno de los puntos del ciclo (segunda igualdad de (1.5)). La *cuenca de atracción inmediata de un punto periódico* es la componente conexa que contiene al punto periódico. La *cuenca de atracción inmediata de un  $n$ -ciclo* es la unión de las componentes conexas que contienen a cada punto del ciclo. Este conjunto no es conexo.

Los teoremas 1.3 y 1.4 también tienen una versión para ciclos. Sólo hay que aplicar dichos teoremas a cada uno de los puntos del ciclo y para el caso repulsor, suponer que  $(R^n)'(z_0) = (R^n)''(z_0) = \dots = (R^n)^{(k-1)}(z_0) = 0$  mientras que  $(R^n)^{(k)}(z_0) \neq 0$ .

### 1.1.3 PUNTOS CRÍTICOS DE UNA FUNCIÓN RACIONAL

Sea  $R \in \mathfrak{R}_d$ . Consideremos el conjunto  $R^{-1}(w) := \{z \in \hat{\mathbb{C}} : R(z) = w\}$ .

Excepto posiblemente en un conjunto finito de puntos, por el teorema fundamental del álgebra,  $R^{-1}(w)$  tiene  $d$  puntos distintos. Esta observación conduce a la definición de punto crítico.

#### Definición 1.13 *Punto crítico y valor crítico*

Sea  $R \in \mathfrak{R}_d$  y  $w \in \hat{\mathbb{C}}$ . Si  $\#R^{-1}(w) < d$ ,  $w$  se denomina valor crítico de  $R$ . Un punto  $z \in R^{-1}(w)$  se llama punto crítico si es una raíz de  $R(z) = w$  con multiplicidad mayor que 1.

Al conjunto de puntos críticos de  $R$  lo denotaremos mediante  $\text{Crit}(R)$ .

Sabemos que  $R$  es inyectiva en una vecindad de un punto de  $\mathbb{C}$  en el cual

$R'$  no tenga ni un cero ni un polo. De este modo, si  $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ , entonces

$\text{Crit}(R)$  está formado por los ceros de  $R'(z)$ , los polos de  $R(z)$  con multiplicidad mayor que 1 y posiblemente  $\infty$ .

El siguiente resultado nos dice que para determinar los ciclos (súper) atractores, se debe estudiar las iteraciones de los puntos críticos de la función en cuestión.

### **Teorema 1.6**

*Si  $\gamma_n$  es un  $n$ - ciclo (súper) atractor,  $U_{\gamma_n}$  contiene al menos un punto crítico*

El siguiente teorema da la cantidad de puntos críticos y la cantidad máxima de ciclos que puede exhibir una función racional.

### **Teorema 1.7**

*Una función  $R \in \mathfrak{R}_d$  tiene  $2d - 2$  puntos críticos contados con su multiplicidad y a lo más  $2d - 2$  ciclos, los cuales pueden ser (súper) atractores o indiferentes.  $z = \infty$*

Aparte de estudiar los puntos que determinan la dinámica de  $R$ , necesitaremos de los siguientes teoremas, cuyas demostraciones pueden encontrarse en (Nevanlinna & Paatero, 1982) y (Milnor, 2006).

### **Teorema 1.8      *Principio de monodromía***

*Sea  $\Omega$  un dominio simplemente conexo y  $f$  una función meromorfa (holomorfa) uniforme en un dominio contenido en  $\Omega$ . Si  $f$  se prolonga analíticamente (mediante funciones holomorfas) a lo largo de todo arco contenido en  $\Omega$ , entonces  $f$  se extiende a una función uniforme meromorfa (holomorfa) en  $\Omega$ .*

**Teorema 1.9**                      **Mapeo de Riemann**

*Entre dos dominios simplemente conexos cuyas fronteras contengan más de un punto existe siempre una transformación conforme.*

**Teorema 1.10**                      **Fórmula de Riemann – Hurwitz**

*Sean  $V$  y  $W$  dominios sobre la esfera de Riemann con conexidad finita  $m$  y  $n$  respectivamente, y sea  $f : V \rightarrow W$  un mapeo propio  $k$  – ramificado con  $r$  puntos críticos contando con sus multiplicidades. Entonces*

$$m - 2 = k(n - 2) + r$$

Como es usual, un *mapeo propio* es aquel en el que las pre imágenes de subconjuntos compactos de  $W$  son compactos.

**Teorema 1.11**                      **De Caratheodóry**

*Sea  $U \subset \hat{\mathbb{C}}$  un conjunto abierto conformemente isomorfo a  $\mathbb{D}^1$ . El mapeo inverso de Riemann  $\mathbb{E} : D \rightarrow U$  se extiende continuamente a un mapeo  $\tilde{\mathbb{E}} : \overline{\mathbb{D}^1} \rightarrow \overline{U}$  si y sólo si  $\partial U$  es localmente conexa o si y sólo si  $\hat{\mathbb{C}} - U$  es localmente conexo. Además, si  $U$  es un dominio de Jordan, entonces el mapeo de Riemann se extiende a un homeomorfismo de  $\overline{U}$  hacia  $\overline{\mathbb{D}^1}$ .*

## 1.2 LOS CONJUNTOS DE JULIA Y FATOU

### Definición 1.14      *Conjunto de Fatou*

Un punto  $z \in \hat{\mathbb{C}}$  pertenece al conjunto de Fatou,  $\mathcal{F}(R)$ , si y sólo si existe una vecindad  $U$  de  $z$  tal que la familia de iterados  $\{R^n : U \rightarrow \hat{\mathbb{C}} : n \in \mathbb{N}\}$  es normal en  $U$ <sup>1</sup>.

Al complemento de  $\mathcal{F}(R)$  se le denomina el *conjunto de Julia* de  $R$  y se le denota mediante  $\mathcal{J}(R)$ . De la Definición 1.14,  $\mathcal{F}(R)$  es abierto y por tanto  $\mathcal{J}(R)$  es cerrado con respecto a la topología usual de  $\hat{\mathbb{C}}$ .

Una definición equivalente de los conjuntos de Julia y Fatou es que un punto  $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$  está en el conjunto de Julia si y sólo si la dinámica de  $R$ , esto es el comportamiento de los iterados de  $R$ , en una vecindad de  $z_0$  exhibe una dependencia sensible a las condiciones iniciales, de modo que condiciones iniciales muy cercanas conducen a órbitas totalmente diferentes después de un cierto número de iteraciones. En este sentido, el conjunto de Fatou son aquellas regiones de  $\hat{\mathbb{C}}$  donde  $R$  tiene una dinámica estable.

Se denomina *dominio en el conjunto de Fatou* a cualquier componente conexa abierta del conjunto de Fatou.

---

<sup>1</sup> Una familia de funciones meromorfas es normal si cada sucesión de elementos de la familia tiene una sub sucesión que converge uniformemente sobre cada subconjunto compacto del dominio de la familia.

El siguiente teorema resume algunos hechos conocidos sobre el conjunto de Fatou y Julia de una función  $R \in \mathfrak{R}_d$  y que serán de utilidad en la descripción de  $N_p$ .

**Teorema 1.12**

- I.  $\mathcal{J}(R) \neq \emptyset$
- II. Sea  $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$  un punto que está en un ciclo  $\gamma$  de  $R$ . Si  $\gamma$  es (súper) atractor entonces  $\gamma \subset \mathcal{F}(R)$ ; y si  $\gamma$  es repulsor, está contenido en  $\mathcal{J}(R)$
- III. Sea  $M$  un método para aproximar los ceros de una función  $f(z)$ . Entonces  $\{z \in \hat{\mathbb{C}} : f(z) = 0\} \subset \mathcal{F}(M_f)$ , donde  $M_f$  es el resultado de aplicar  $M$  a  $f$ .
- IV. Si  $z_0$  es un punto de un ciclo repulsor, entonces

$$\mathcal{J}(R) = cl\left(\left\{z \in \hat{\mathbb{C}} : R^n(z) = z_0 \wedge n \in \mathbb{N}\right\}\right) \quad (1.6)$$

- V. Los ciclos repulsores son densos en  $\mathcal{J}(R)$ . En particular, cada punto del conjunto de Julia se obtiene como límite de puntos que están en ciclos repulsores.
- VI.  $\mathcal{J}(R)$  es un conjunto perfecto, es decir, es cerrado y no tiene puntos aislados.

- VII. Si  $M$  es una transformación de Mobius y  $S \simeq_M R$ , entonces  $\mathcal{F}(S) = M(\mathcal{F}(R))$  y  $\mathcal{J}(S) = M(\mathcal{J}(R))$ . Es decir, la dinámica de dos funciones conjugadas mediante una transformación de Mobius es equivalente: cuencas de atracción y sus correspondientes fronteras de una son conformemente equivalentes a los de la otra
- VIII.  $\mathcal{J}(R)$  y  $\mathcal{F}(R)$  son completamente invariantes, es decir,  $R(\mathcal{J}(R)) = \mathcal{J}(R) = R^{-1}(\mathcal{J}(R))$  y  $R(\mathcal{F}(R)) = \mathcal{F}(R) = R^{-1}(\mathcal{F}(R))$
- IX.  $\mathcal{J}(R) = \mathcal{J}(R^n)$
- X. Si  $z_0$  es un punto periódico atractor de  $R$ , entonces  $\mathcal{J}(R) = \partial U(z_0)$
- XI. Si  $\mathcal{F}(R) \neq \emptyset$  entonces  $\mathcal{J}(R)$  no tiene puntos interiores.
- XII.  $\mathcal{F}(R)$  tiene 0, 1, 2 o una cantidad infinita de componentes
- XIII. Dada una componente arbitraria  $T$  de  $\mathcal{F}(R)$  con  $\text{grad}(R) = d \geq 2$ , se tiene que  $R^{-1}(T) = \bigsqcup_{k \leq d} T_k$  donde cada  $T_k$  es una componente de Fatou.
- Además,  $R|_{T_j} \in \mathfrak{R}_{d_j}$  con  $\sum_{j=1}^k d_j = d$ . Por lo tanto,  $R^{-1}(z)$  tiene  $d_j$  copias en la componente  $T_j$ .
- XIV. Si  $R$  posee un único punto fijo repulsor o racionalmente indiferente, entonces  $\mathcal{J}(R)$  es conexo.



### 1.3 CONCEPTOS BÁSICOS DE GEOMETRÍA CASI CONFORME

Sea  $w = f(z)$  un  $\mathbb{C}^1$  – homeomorfismo de una región en otra,  $z = x + iy$  y

$w = u + iv$ . Entonces

$$f_z = \frac{1}{2}(u_x + v_y) + \frac{i}{2}(v_x - u_y)$$

$$f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(u_x - v_y) + \frac{i}{2}(v_x + u_y)$$

#### Definición 1.15 **Primer coeficiente de dilatación**

*El primer coeficiente de dilatación de  $f$  en el punto  $z$  se define como*

$$D_f := \frac{|f_z| + |f_{\bar{z}}|}{|f_z| - |f_{\bar{z}}|}$$

#### Definición 1.16 **Mapeo $K$ – casi conforme**

*El mapeo  $f$  se denomina casi conforme si  $D_f$  es acotado. Se denomina  $K$  – casi conforme si  $D_f \leq K$ .*

Un mapeo 1 – casi conforme se denomina *mapeo conforme*.

Las herramientas de este tipo de geometría que usaremos son las de longitud extrema y módulo. Para introducir estas cantidades, necesitaremos de funciones que se denominan *admisibles*.

Una función  $\dots$ , definida en todo el plano, se denomina *admisible* si satisface las siguientes condiciones:

1.  $\dots > 0$  y además es medible en el sentido de Lebesgue.
2.  $A(\dots) = \iint_{\mathbb{R}^2} \dots^2 dx dy \neq 0$  o posiblemente infinito

Sea  $\Gamma$  una familia de curvas en el plano, donde cada  $\gamma \in \Gamma$  es una unión contable de arcos abiertos, cerrados o curvas cerradas, y cada sub arco cerrado es rectificable. Si  $\dots$  es admisible, definimos

$$L_{\gamma}(\dots) = \begin{cases} \int_{\gamma} \dots |dz|, & \dots \text{ medible sobre } \gamma \\ \infty, & \text{otro caso} \end{cases}$$

Sea

$$L(\dots) = \inf_{\gamma \in \Gamma} L_{\gamma}(\dots) \quad (1.7)$$

**Definición 1.17 Longitud extrema y módulo de  $\Gamma$**

La cantidad  $\lambda(\Gamma)$  denominada *longitud extrema* de  $\Gamma$  se define como

$$\lambda(\Gamma) := \sup_{\dots} \frac{L^2(\dots)}{A(\dots)} \quad (1.8)$$

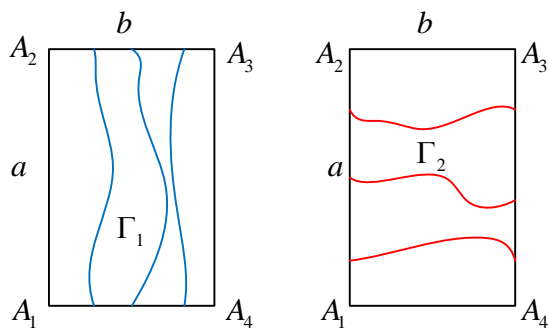
, para una función admisible  $\dots$ . El *módulo* de  $\Gamma$  se define como

$$\text{mod}(\Gamma) := \frac{1}{\lambda(\Gamma)} \quad (1.9)$$

La longitud extrema es una especie de promedio de longitudes mínimas de las curvas en  $\Gamma$ . Necesitaremos los módulos de un rectángulo y de un anillo (Jenkins, 1958).

### Ejemplo 1.1 *Módulo de un rectángulo*

Consideremos un rectángulo  $R$  de lados  $a$  y  $b$  y las siguientes dos familias de curvas,  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ , mostradas en la Figura 1-1



**Figura 1-1** *Dos familias de curvas en un rectángulo*

Consideremos primero a la familia  $\Gamma_1$ . Obviamente  $\gamma \equiv 1$  es admisible, por

tanto,  $A(\gamma) = ab, L(\gamma) = a$  y de (1.8),  $\lambda(\Gamma_1) \geq \frac{a}{b}$ .

Colocando un sistema de coordenadas con el origen en  $A_1$ , para una función

$\gamma$  admisible cualquiera, de (1.7), tenemos que

$$L(p) \leq \int_0^a \dots (x+iy) dy$$

$$bL(p) \leq \int_0^b \int_0^a \dots (x+iy) dy dx = \iint_R \dots dy dx$$

Entonces, empleando el teorema de Fubini

$$b^2 L^2(\dots) \leq \left( \int_0^b \int_0^a \dots (x+iy) dy dx \right) \left( \int_0^a \int_{x_y} \dots (x+iy) dx dy \right)$$

$$= ab \left( \int_{x_y} \dots (x+iy) dx \right) \left( \int_0^a \dots (x+iy) dy \right)$$

$$= ab \int_0^a \int_{x_y} \dots^2 dx dy = abA(\dots)$$

Luego,  $\frac{L^2(\dots)}{A(\dots)} \leq \frac{a}{b}$ , de donde  $\}(\dots) \leq \frac{a}{b}$ . Finalmente,  $\}(\Gamma_1) = \frac{a}{b}$ , por lo que

$$\text{mod}(\Gamma_1) = \frac{b}{a}.$$

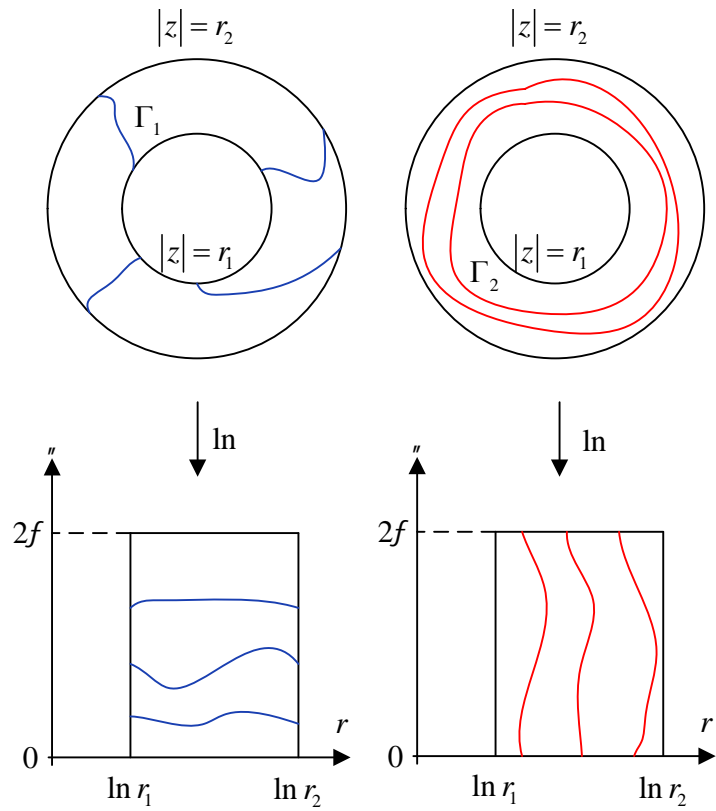
Procediendo de forma análoga,  $\}(\Gamma_2) = \frac{b}{a}$  y entonces  $\text{mod}(\Gamma_2) = \frac{a}{b}$

=====

### Ejemplo 1.2 *Módulo de un anillo*

Sea el anillo  $A_{r_1, r_2} := \{z \in \mathbb{C} : r_1 \leq |z| \leq r_2\}$  y consideremos las siguientes dos

familias en  $A_{r_1, r_2}$ :



**Figura 1-2 Dos familias de curvas en un anillo**

En el primer caso,  $\Gamma_1$  une las fronteras de  $A_{r_1, r_2}$  y en el segundo,  $\Gamma_2$  separa las fronteras de  $A_{r_1, r_2}$ .

Aplicando un cambio de coordenadas logarítmico, como en la Figura 1-2, podemos aplicar los resultados del Ejemplo 1.1, a las familias  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ .

$$\text{Entonces } \text{mod}(\Gamma_1) = \frac{2f}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \text{ y } \text{mod}(\Gamma_2) = \frac{1}{2f} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right).$$

## CAPÍTULO 2

# LA GEOMETRÍA GLOBAL

### 2.1 INTRODUCCIÓN

El método de Newton es uno de los más populares entre los métodos abiertos que se utilizan en la solución de ecuaciones. Resulta natural preguntarse sobre su extensión a polinomios de variable compleja. En este capítulo se describirá la geometría que resulta al aplicar este método a un dominio acotado del plano complejo. Se analizarán las dificultades de dicha extensión y finalmente se describirá su geometría global utilizando la esfera de Riemann como modelo de  $\hat{\mathbb{C}}$ .

### 2.2 EL PROBLEMA DE CAYLEY

En 1879, el matemático británico Arthur Cayley propone usar el método de Newton para resolver ecuaciones definidas en el campo complejo. Lo que se conoce actualmente como *problema de Cayley* (Figura 2-1), consiste en estudiar las cuencas de atracción del método de Newton  $N_p = id - \frac{p}{p'}$ ,

cuando es aplicado para aproximar las raíces de un polinomio  $p$  de variable compleja.

### NO. 3.—THE NEWTON-FOURIER IMAGINARY PROBLEM.

THE Newtonian method as completed by Fourier, or say the Newton-Fourier method, for the solution of a numerical equation by successive approximations, relates to an equation  $f(x) = 0$ , with real coefficients, and to the determination of a certain real root thereof  $\alpha$  by means of an assumed approximate real value  $\xi$  satisfying prescribed conditions: we then, from  $\xi$ , derive a nearer approximate value  $\xi_1$  by the formula  $\xi_1 = \xi - \frac{f(\xi)}{f'(\xi)}$ ; and thence, in like manner,  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$  approximating more and more nearly to the required root  $\alpha$ .

In connexion herewith, throwing aside the restrictions as to reality, we have what I call the Newton-Fourier Imaginary Problem, as follows.

Take  $f(u)$ , a given rational and integral function of  $u$ , with real or imaginary coefficients;  $\xi$ , a given real or imaginary value, and from this derive  $\xi_1$  by the formula  $\xi_1 = \xi - \frac{f(\xi)}{f'(\xi)}$ , and thence  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$  each from the preceding one by the like formula.

A given imaginary quantity  $x + iy$  may be represented by a point the coordinates of which are  $(x, y)$ : the roots of the equation are thus represented by given points  $A, B, C, \dots$ , and the values  $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$  by points  $P, P_1, P_2, \dots$  the first of which is assumed at pleasure, and the others each from the preceding one by the like given geometrical construction. The problem is to determine the regions of the plane, such that  $P$  being taken at pleasure anywhere within one region we arrive ultimately at the point  $A$ ; anywhere within another region at the point  $B$ ; and so for the several points representing the roots of the equation.

The solution is easy and elegant in the case of a quadric equation, but the next succeeding case of the cubic equation appears to present considerable difficulty.

CAMBRIDGE, March 3d, 1879.

---

**Figura 2-1 Original paper Newton – Fourier Imaginary Problem**

**Fuente:** (Cayley, 1879)

Para polinomios cuadráticos, la descripción de las cuencas de atracción es bastante sencilla. En lo sucesivo,  $p \in \mathbb{C}[z]$

### Teorema 2.1

*Sea  $p$  un polinomio cuadrático con raíces simples. Las cuencas de atracción de  $N_p$  corresponden a los dos semiplanos en los que el plano complejo queda dividido por la mediatriz del segmento que une ambas raíces. Además, los puntos de un semiplano convergen a la raíz contenida en dicho semiplano.*

#### Demostración

Factorizando al polinomio de la forma  $p(z) = (z-r)(z-s)$  se tiene que

$$N_p(z) = z - \frac{(z-r)(z-s)}{2z-(r+s)} = \frac{z^2 - rs}{2z-(r+s)} \quad (2.1)$$

Demostraremos que hay una transformación de Möbius  $\{$  que hace a  $N_p(z)$  conformemente conjugado a  $g(z) = z^2$ .

Sea  $\{ (z) = \frac{az+b}{cz+d}$ . Entonces  $\{^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$ . La Definición 1.4 nos dice

que  $N_p = \{ \circ g \circ \{^{-1}$ , luego

$$\frac{z^2 - rs}{2z-(r+s)} = \frac{a \left( \frac{dz-b}{-cz+a} \right)^2 + b}{c \left( \frac{dz-b}{-cz+a} \right)^2 + d}$$



Reordenando

$$\frac{z^2 - rs}{2z - (r + s)} = \frac{z^2(ad^2 + bc^2) - 2z(abd + abc) + ab(a + b)}{z^2(cd^2 + dc^2) - 2z(bcd + acd) + cb^2 + a^2d} \quad (2.2)$$

Comparando coeficientes en (2.2) se tienen las siguientes ecuaciones:

$$ad^2 + bc^2 = 1 \quad (2.3)$$

$$ab(d + c) = 0 \quad (2.4)$$

$$ab(a + b) = -rs \quad (2.5)$$

$$cd(c + d) = 0 \quad (2.6)$$

$$cd(a + b) = -1 \quad (2.7)$$

$$cb^2 + a^2d = -(r + s) \quad (2.8)$$

Además de la condición  $ad - bc \neq 0$ , propia de las transformaciones de Möbius.

De (2.4) y (2.6),  $c = -d$ ; y de (2.5) con (2.7) se tiene que  $\frac{cd}{ab} = \frac{1}{rs}$ , es decir

$$\left(\frac{a}{c}\right)\left(\frac{b}{c}\right) = -rs \quad (2.9)$$

Además, de (2.8), (2.3) y junto con  $c = -d$  resulta

$$c(a^2 - b^2) = r + s$$

$$c^2(a + b) = 1$$

Dividiendo estos últimos, tenemos que

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = r + s \quad (2.10)$$

Resolviendo (2.9) y (2.10) para las variables  $\frac{a}{c}$  y  $\frac{b}{c}$  se tiene que

$$\frac{a}{c} = r \quad \wedge \quad \frac{b}{c} = -s$$

Luego,

$$\phi(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{rz-s}{z-1} \quad (2.11)$$

Ahora calculamos el conjunto de Julia  $\mathcal{J}(z^2)$ . Primero, la  $n$ -ésima iterada de  $g$  es  $g^n(z) = z^{2^n}$ . Encontramos puntos periódicos de  $g$  al resolver la ecuación  $z^{2^n} = z$ . Si  $z \neq 0$

$$z^{2^n} = z \Leftrightarrow z^{2^n-1} = 1 \quad (2.12)$$

La ecuación (2.12) nos dice que  $z$  es una raíz de la unidad, luego  $|z| = 1$ .

Además,  $\lambda = |g'(z)| = 2^n |z|^{2^n-1} = 2^n > 1$ , por lo que  $z$  es además repulsor.

Para  $z = 0$ ,  $\lambda = 0$  (super atractor), por lo que no pertenece a  $\mathcal{J}(z^2)$ .

Por tanto,  $\mathcal{J}(z^2) = cl(\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}) = \mathbb{S}^1$

Dado que  $\mathcal{J}$  es una transformación de Möbius, conserva “circunferencias”. En particular,  $z = 1 \in \mathbb{S}^1$  y de (2.11),  $\mathcal{J}(1) = \infty \in \mathcal{J}(\mathbb{S}^1)$ , de donde  $\mathcal{J}(\mathbb{S}^1)$  es una recta. También,  $z = -1 \in \mathbb{S}^1$  y nuevamente de (2.11),  $\mathcal{J}(-1) = \frac{a+b}{2} \in \mathcal{J}(\mathbb{S}^1)$ .

Además,  $\mathcal{J}(i) = \frac{ir-s}{i-1} = \frac{r+s}{2} + \frac{i(r-s)}{2} \in \mathcal{J}(\mathbb{S}^1)$ , por lo que el vector dirección de esta recta,  $i(r-s)$ , es perpendicular al de  $\overline{rs}$ . En consecuencia,

$$\mathcal{J}(N_p) = \mathcal{J}(\mathbb{S}^1) = \frac{r+s}{2} + \frac{i(r-s)}{2}t; t \in \mathbb{R} \quad (2.13)$$

Esta ecuación es la de la mediatriz del segmento que une  $r$  y  $s$ .

Vamos ahora a re escalar el polinomio  $p$ . Definimos  $T(z) = az + b$  de manera

que  $T(i) = ai + b = r$  y  $T(-i) = -ai + b = s$ . Entonces  $a = \frac{r-s}{2i}$  y  $b = \frac{r+s}{2}$

Sea  $q(z) = (p \circ T)(z)$ . Dado que  $q(i) = p(T(i)) = p(r) = 0$  y

$q(-i) = p(T(-i)) = p(s) = 0$  se tiene que  $q(z) = (z-i)(z+i)$ . De acuerdo

al Teorema 1.1, la dinámica de  $N_p$  es cualitativamente equivalente a la

dinámica de  $N_q := \frac{z^2-1}{2z}$ , con lo cual (2.11) queda de la forma

$$\mathbb{E}(z) = i \frac{z+1}{z-1} \quad (2.14)$$

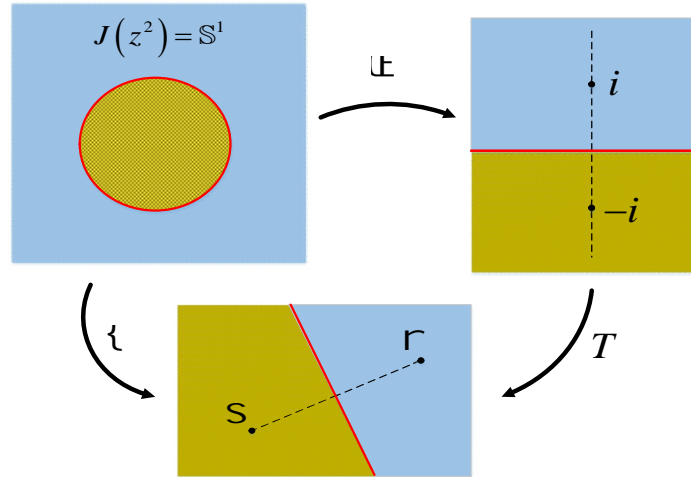
siendo además  $\mathcal{J}(N_q) = \text{Eje } X = \widehat{\mathbb{R}}$ .

Sea  $z = x + iy = r \cos_\theta + i r \sin_\theta$ , entonces, de (2.14):

$$\mathfrak{E}(z) = i \frac{x+1+iy}{x-1+iy} = i \frac{(x+1+iy)(x-1-iy)}{(x-1+iy)(x-1-iy)} = \frac{2y}{(x-1)^2 + y^2} + i \frac{(r^2-1)}{(x-1)^2 + y^2}$$

Luego, si  $0 \leq r < 1$  entonces  $\text{Im}(\mathfrak{E}(z)) < 0$  y si  $r > 1$ ,  $\text{Im}(\mathfrak{E}(z)) > 0$ .

De acuerdo al Teorema 1.12 – VII, se garantiza que las cuencas de atracción y sus correspondientes fronteras (conjuntos de Julia) de  $z^2$  y  $N_q$  son conformemente equivalentes, por lo que el comportamiento de los iterados de  $N_q$ , y por tanto de  $N_p$ , queda resumido en la Figura 2-2.

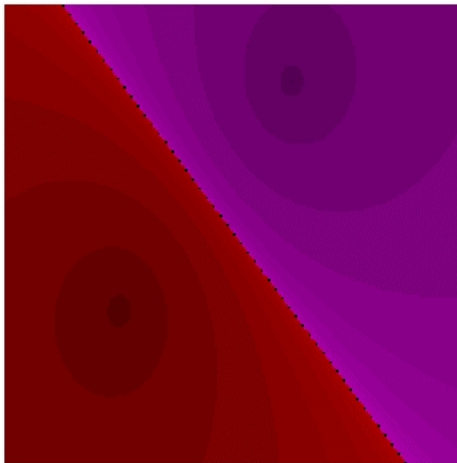


**Figura 2-2 Cuencas de atracción de un polinomio cuadrático**

■

Para el caso de una raíz doble, digamos  $p(z) = (z - r)^2$ , la ecuación (2.13) se reduce al punto  $\mathcal{J}(N_p) = r$ .

Podemos visualizar el Teorema 2.1 del siguiente modo: Tomamos un dominio  $E \subset \mathbb{C}$  y a cada uno de sus puntos le aplicamos  $N_p$ . Si después de cierta tolerancia  $tol$ , o fijado un número máximo de iteraciones  $itermax$ , la órbita de dicho punto converge a una de las raíces, lo pintamos de un color. Como de costumbre para métodos iterativos, nuestro criterio de parada será cuando  $|z_n - z_{n-1}| < tol$ , siendo  $z_n := N_p^n(z_0)$ ,  $z_0 \in E$ . No obstante, esto no garantiza que  $z_n$  se aproxime a un cero de  $p(z)$ , por lo que tendremos que agregar la condición  $|p(z)| < tol$  (instrucción (7) de la Figura 2-4). El comando *Cuencas* (Figura 2-4), implementado en Mathematica 10.0, nos permite lograr este objetivo.



**Figura 2-3 Cuencas de atracción de Newton y conjunto de Julia para  $z^2 + (1 - i)z - 5i$**

```

Cuencas[p_, {xmin_, xmax_, nx_}, {ymin_, ymax_, ny_}, tol_, itermax_] :=
Block[{hx =  $\frac{x_{\max} - x_{\min}}{nx}$ , hy =  $\frac{y_{\max} - y_{\min}}{ny}$ , pol, d, Raices, NumRaices,
  Comp, NewMap, orbita, IdentRaiz, zz, numraiz, RazyLong, colores},
(*1*) pol[z_] := Evaluate[p];
(*2*) d = Exponent[pol[z], z];
(*3*) Raices = Union[z /. NSolve[pol[z] == 0, z]];
(*4*) NumRaices = Length[Raices];
(*5*) Comp = Compile[{{z, _Complex}}, Evaluate[pol[z]]];
(*6*) NewMap = Compile[{{z, _Complex}}, Evaluate[z - pol[z]/D[pol[z], z]]];
(*7*)
orbita =
Table[NestWhileList[NewMap, x + I y,
  (Abs[Comp[#]] > tol || Abs[#1 - #2] > tol/d) &, {2, 2}, itermax],
  {y, ymin, ymax, hy}, {x, xmin, xmax, hx}];
(*8*) IdentRaiz[orbit_] := (
  zz = Last[orbit];
  numraiz = 1;
  Scan[If[Abs[zz - #] < tol, Return[numraiz], numraiz++] &, Raices];
  If[numraiz ≤ NumRaices, {numraiz, Length[orbit]}, {0, 0}]
);
(*9*) RazyLong = Map[IdentRaiz, orbita, {2}];
(*10*) colores = RazyLong /. {
  {k_Integer, l_Integer} → If[k == 0, {0, 0, 0},
    {300 (k - 1) / (360 * (Exponent[pol[z], z] - 1)), 1, (1 - 1 / (l + 2)) ^ 6}
  ]
};
(*11*) Show[Graphics[Raster[colores, ColorFunction → Hue]]]
]

```

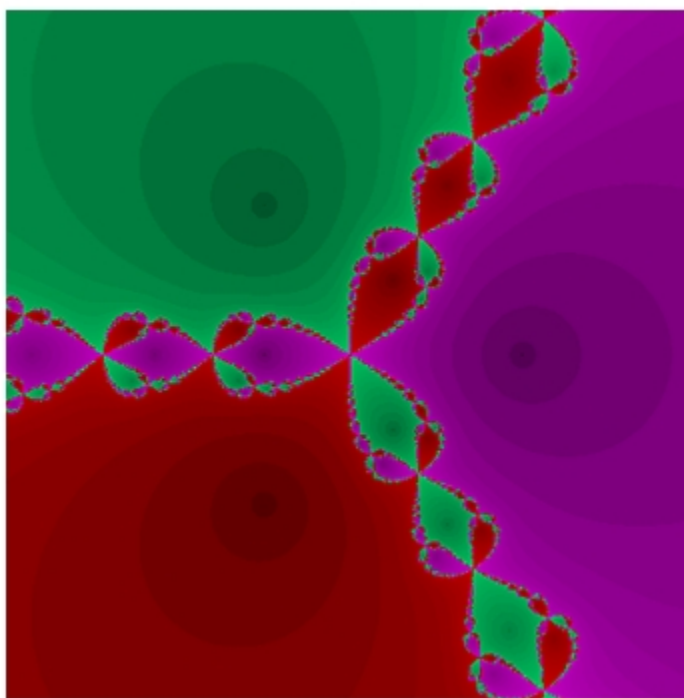
**Figura 2-4 Implementación del comando Cuencas en Mathematica 10.0**

La Figura 2-3 muestra las cuencas de atracción correspondientes a las dos raíces de  $p(z) = z^2 + (1-i)z - 5i = (z + 2 + i)(z - 1 - 2i) = (z - r)(z - s)$ . Las “curvas de nivel” que se observan indican la velocidad de convergencia: Cuanto más oscuras son, más rápido se aproximan a la raíz. Los puntos negros en la mediatriz indican un comportamiento caótico de  $N_p$ . Sus órbitas

constan de puntos que se dispersan a lo largo de la mediatriz e incluyen al punto  $\infty$ . Además su conjunto de Julia tiene área nula.

### 2.3 ALGORITMOS GENERALMENTE CONVERGENTES Y EL MÉTODO DE NEWTON

Como reconoció Cayley, la extensión a polinomios cúbicos es más complicada. En particular, estudió el polinomio  $p(z) = z^3 - 1$ . Apliquemos el algoritmo de la Figura 2-4 a dicho polinomio.



*Figura 2-5 Cuencas de atracción de  $z^3 - 1$*

Los resultados se muestran en la Figura 2-5. Si  $w_0 = 1, w_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  y

$w_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$  son las tres raíces de la unidad,  $B_{w_0}, B_{w_1}, B_{w_2}$  corresponden a

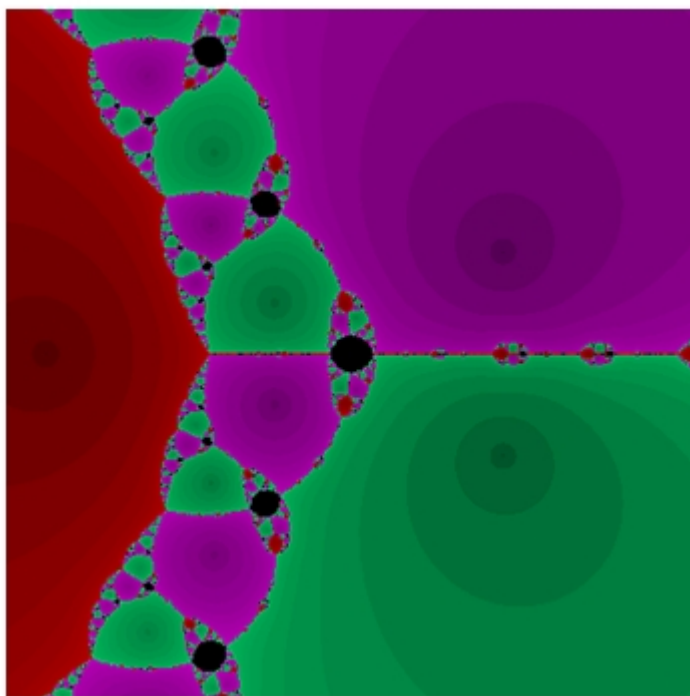
las regiones lila, verde y rojo respectivamente.

En el caso cuadrático, ocurría que puntos próximos a una de las raíces convergían a esta. No obstante, al observar la Figura 2-5, se observa que puntos muy próximos entre sí y cercanos al origen, por ejemplo, convergen a raíces diferentes. Además, la frontera entre  $B_{w_0}, B_{w_1}, B_{w_2}$  está lejos de ser trivial y tiene una apariencia fractal.

Además, ocurre otro fenómeno. Consideremos ahora el polinomio  $p(z) = z^3 - 2z + 2$ . Sus cuencas de atracción se muestran en la Figura 2-6.

Según la instrucción (8) de la Figura 2-4, las regiones pintadas de negro corresponden a puntos de inicialización para los cuales  $N_p$  no converge a ninguna de las raíces de  $p$  (al menos hasta el número máximo de iteraciones permitido). Pero esto no es un problema computacional. El Teorema 2.2 prueba que dichos conjuntos efectivamente existen.





**Figura 2-6 Cuencas de atracción de  $z^3 - 2z + 2$**

## Teorema 2.2

*El método de Newton aplicado al polinomio  $p(z) = z^3 - 2z + 2$  tiene un 2 – ciclo súper atractor.*

*Demostración*

En este caso,  $N_p(z) = z - \frac{z^3 - 2z + 2}{3z^2 - 2} = \frac{2z^3 - 2}{3z^2 - 2}.$

Entonces

$$N'_p(z) = \frac{6z^2(3z^2 - 2) - 6z(2z^3 - 2)}{(3z^2 - 2)^2} = \frac{6z p(z)}{(3z^2 - 2)^2} \quad (2.15)$$

De modo que  $N'_p(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$  o  $z$  es un cero de  $p$ . Pero  $p(0) = 2$ , por lo que  $z = 0$  es un punto crítico libre. Además,  $N_p(0) = 1$  y  $N_p(1) = 0$ , por lo que se tiene un 2 – ciclo de la forma  $\{0,1\}$ . Su multiplicador es

$$\lambda = (N_p^2)'(z) = N'_p(N_p(z))N'_p(z)$$

Entonces  $\lambda = N'_p(N_p(0))N'_p(0) = N'_p(1)N'_p(0) = 0$ , por lo que el ciclo es súper atractor. Por consiguiente, existe un conjunto abierto  $U_0 \supset \{0\}$  con la propiedad que si  $z \in U_0 \Rightarrow N_p^n(z) \rightarrow w$ , siendo  $w$  una raíz de  $p$ .

■

Otra posibilidad para la presencia de las regiones en negro de la Figura 2-6 es que correspondan a puntos de inicialización cuyas órbitas converjan a  $\infty$ . No obstante, esta posibilidad queda descartada con el siguiente teorema.

### Teorema 2.3

Sea  $p$  un polinomio de grado  $d \geq 2$ . Entonces  $z = \infty$  es un punto fijo repulsor de  $N_p$

*Demostración*

Sea  $p(z) = \prod_{k=1}^n (z - r_k)^{m_k}$  con  $\sum_{k=1}^n m_k = d$  y  $r_k \neq r_j$  si  $k \neq j$ .

Entonces  $\ln(p(z)) = \sum_{k=1}^n m_k \ln(z - r_k)$ . Derivando esto último se llega a

$$\frac{p'(z)}{p(z)} = \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{z - r_k} \quad (2.16)$$

Reemplazando (2.16) en la definición de  $N_p$  se llega a

$$\begin{aligned} N_p(z) &= z - \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{m_k}{z - r_k}} \\ &= z - \frac{1}{\sum_{k=1}^n m_k \frac{(z - r_1) \dots (z - r_{k-1})(z - r_{k+1}) \dots (z - r_n)}{(z - r_1) \dots (z - r_k) \dots (z - r_n)}} \\ &= z - \frac{1}{\sum_{k=1}^n m_k \frac{L_k(z)}{L(z)}} = \frac{z \sum_{k=1}^n m_k L_k(z) - L(z)}{\sum_{k=1}^n m_k L_k(z)} \end{aligned} \quad (2.17)$$

donde  $L(z)$  y  $L_k(z)$  están definidos por:

$$L(z) := \prod_{k=1}^n (z - r_k) \quad (2.18)$$

$$L_k(z) := \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (z - r_j) \quad (2.19)$$

Estos son polinomios de grado  $n$  y  $n-1$  respectivamente por lo que  $N_p$  es de grado  $n$ . Es decir, el grado de  $N_p$  es igual al número de raíces diferentes

de  $p(z)$ , de manera que si los ceros de  $p$  son todos simples,

$\text{grad}(N_p) = \text{grad}(p)$ . En cualquier caso, (2.17) muestra que  $N_p(\infty) = \infty$ .

Además,

$$\begin{aligned}
 N'_p(z) &= \frac{\left(\sum_{k=1}^n m_k L_k(z) + z \sum_{k=1}^n m_k L'_k(z) - L'(z)\right) \left(\sum_{k=1}^n m_k L_k(z)\right)}{\left(\sum_{k=1}^n m_k L_k(z)\right)^2} \\
 &\quad - \frac{\left(z \sum_{k=1}^n m_k L_k(z) - L(z)\right) \left(\sum_{k=1}^n m_k L'_k(z)\right)}{\left(\sum_{k=1}^n m_k L_k(z)\right)^2} \\
 &= \frac{\overbrace{\left(\sum_{k=1}^n m_k L_k(z) - L'(z)\right)}^{n-1} \overbrace{\left(\sum_{k=1}^n m_k L_k(z)\right)}^{n-1} + \overbrace{L'(z)}^n \overbrace{\left(\sum_{k=1}^n m_k L'_k(z)\right)}^{n-2}}{\underbrace{\left(\sum_{k=1}^n m_k L_k(z)\right)^2}_{2n-2}} \quad (2.20)
 \end{aligned}$$

donde las llaves de (2.20) representan los grados. Luego,  $N'_p(\infty) < \infty$ .

Teniendo en cuenta la definición de  $L(z)$  y  $L_k(z)$ , los coeficientes principales

de los términos de (2.20) valen

$$\begin{aligned}
 \text{coef}(L(z)) &= 1 \\
 \text{coef}(L'(z)) &= n \\
 \text{coef}\left(\sum_{k=1}^n m_k L_k(z)\right) &= \sum_{k=1}^n m_k = d \\
 \text{coef}\left(\sum_{k=1}^n m_k L'_k(z)\right) &= (n-1) \sum_{k=1}^n m_k = d(n-1)
 \end{aligned}$$

Entonces el coeficiente principal de  $N'_p(z)$  es

$$\frac{d(d-n)+d(n-1)}{d^2} = \frac{d^2-d}{d^2} = \frac{d-1}{d}$$

Luego, por la Definición 1.8,

$$\} _{\infty} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{N'_p(\infty)} = \frac{d}{d-1} \quad (2.21)$$

Por lo que  $z = \infty$  es un repulsor.

■

Es decir, si un elemento de  $orb_p^+(z)$  está cerca de infinito, eventualmente regresará a un dominio acotado del plano complejo. Entonces, las regiones de negro de la Figura 2-6 corresponden a puntos de inicio cuyas órbitas no convergen a ningún punto fijo de  $N_p$ . Su existencia responde al problema sobre la existencia de *algoritmos generalmente convergentes*.

### **Definición 2.1      *Función de Iteración y algoritmo puramente iterativo***

Sea  $p(z)$  un polinomio de grado  $d \geq 2$  y  $R \in \mathfrak{R}_{k(d)}$  definida en términos de  $z, p$  y sus derivadas.  $R: \mathbb{P}_d \times \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  se llama *función de iteración para el polinomio  $p$* , y se define como  $R(p, z) = R_p(z)$ , si y sólo si cada cero de  $p$  es un punto fijo (súper) atractor de  $R$ . Si esa propiedad es válida para todo  $p$  de grado  $d$ ,  $R$  se llama *algoritmo puramente iterativo*.

## Ejemplo 2.1

Consideremos la función racional  $R(z) = \frac{3z^3 + 2z - 1}{z^2 + 1}$ .  $R(z)$  no es una función

de iteración para  $p(z) = z^3 - 1$  pues sus ceros no son puntos fijos de  $R(z)$ .

En cambio, sí es función de iteración para  $q(z) = 2z^3 + z - 1$ . Las raíces son,

aproximadamente,  $z_1 = 0.589755$ ,  $z_2 = -0.294877 - 0.872272i$  y  $z_3 = \overline{z_2}$ . Un

cálculo directo muestra que  $|R'(z_k)| < 1$ . En este caso,  $R: \mathbb{P}_3 \times \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  queda

definida como  $R_q(z) = \frac{6z^3 + 6z - 6q(z)}{q'(z) + 5}$ .

=====

## Definición 2.2 *Algoritmos generalmente convergentes*

Sea  $R \in \mathfrak{R}_k$ . Se dice que el algoritmo puramente iterativo  $R: \mathbb{P}_d \times \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  es

generalmente convergente si existe un abierto  $U \subseteq \mathbb{P}_d \times \hat{\mathbb{C}}$  de medida llena

tal que  $\bigwedge_{(p,z) \in \mathbb{P}_d \times \hat{\mathbb{C}}} \bigvee_{\substack{w \in \mathbb{C} \\ p(w)=0}} \text{orb}_{R_p}^+(z) \rightarrow w$

En la definición anterior, el término “*medida llena*” significa que la medida, en el sentido de Lebesgue, de su complemento es cero.

En (McMullen, 1987) se prueba que no existen algoritmos generalmente convergentes para  $d \geq 4$ . Para el caso  $d = 3$ , si  $p(z) = z^3 + az + b$ , (McMullen, 1987) demuestra que el método de Newton aplicado a la función racional  $q(z) = \frac{p(z)}{3az^3 + 9bz - a^2}$  es generalmente convergente. Para el método de Newton tenemos el siguiente teorema.

#### Teorema 2.4

*El método de Newton no es generalmente convergente para  $d \geq 3$*

*Demostración*

Para cada  $d \geq 3$  definamos el polinomio

$$p(z) = \sum_{k=0}^d a_k z^k = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_d z^d \quad (2.22)$$

y su correspondiente función de iteración  $N : \mathbb{P}_d \times \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  definida por

$$N_p(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z)} \quad (2.23)$$

, es decir,

$$N_p(z) = z - \frac{a_d z^d + a_{d-1} z^{d-1} + \dots + a_1 z + a_0}{da_d z^{d-1} + (d-1)a_{d-1} z^{d-2} + \dots + a_1}$$

$$N_p(z) = \frac{a_d (d-1) z^d + a_{d-1} (d-2) z^{d-1} + \dots + a_2 z^2 - a_0}{da_d z^{d-1} + (d-1)a_{d-1} z^d + \dots + 2a_2 z + a_1} \quad (2.24)$$

Vamos a imponer condiciones sobre los coeficientes para que  $N_p$  tenga un 2 – ciclo súper atractor de la forma  $\{0,1\}$ . Aparte de que  $a_d, a_0 \neq 0$ , se debe cumplir que

$$N_p(0) = 1 \quad (2.25)$$

$$N_p^2(0) = N_p(N_p(0)) = N_p(1) = 0 \quad (2.26)$$

$$\} = (N_p^2(0))' = N_p'(1)N_p'(0) = 0 \quad (2.27)$$

De (2.24) y (2.25),  $-a_0 = a_1$ . Para obtener (2.26) se debe tener que

$$a_d(d-1) + a_{d-1}(d-2) + \dots + 2a_3 + a_2 - a_0 = 0 \quad (2.28)$$

Dado que queremos que  $\{0,1\}$  sea un ciclo de  $N_p$ , ni 0 ni 1 deben ser ceros de  $p(z)$ . Por tanto, (2.28) implica que

$$\begin{aligned} a_d d + a_{d-1}(d-1) + \dots + 3a_3 + 2a_2 + a_1 - (a_d + a_{d-1} + \dots + a_3 + a_2 + a_1 + a_0) &= 0 \\ \Rightarrow p'(1) = da_d + (d-1)a_{d-1} + \dots + 2a_2 + a_1 = p(1) \neq 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

Al derivar  $N_p(z) := z - \frac{p(z)}{p'(z)}$  se tiene que

$$N_p'(z) = \frac{p(z)p''(z)}{(p'(z))^2} \quad (2.30)$$

Entonces, para cumplir (2.27),  $N_p'(0) = 0 \Leftrightarrow p''(0) = 0 \Leftrightarrow a_2 = 0$ , según (2.22). Además para evitar indeterminación en (2.27), se debe tener que



$$N'_p(1) \neq \infty \quad (2.31)$$

lo que equivale a  $p'(1) \neq 0$ , es decir, según (2.29)

$$da_d + (d-1)a_{d-1} + \dots + 4a_4 + 3a_3 + a_1 \neq 0$$

Sin perder generalidad, podemos suponer que  $a_0 = 1$ , de modo que

$$N: \widetilde{\mathbb{P}}_d \times \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}, \quad \text{donde} \quad \widetilde{\mathbb{P}}_d := \{(a_3, \dots, a_d) : a_k \in \mathbb{C}\} = \mathbb{C}^{d-2}. \quad \text{Entonces,}$$

resumiendo, para un  $d \geq 3$ , si

$$-1 + 2a_3 + 3a_4 + \dots + (d-1)a_d = 0 \quad (2.32)$$

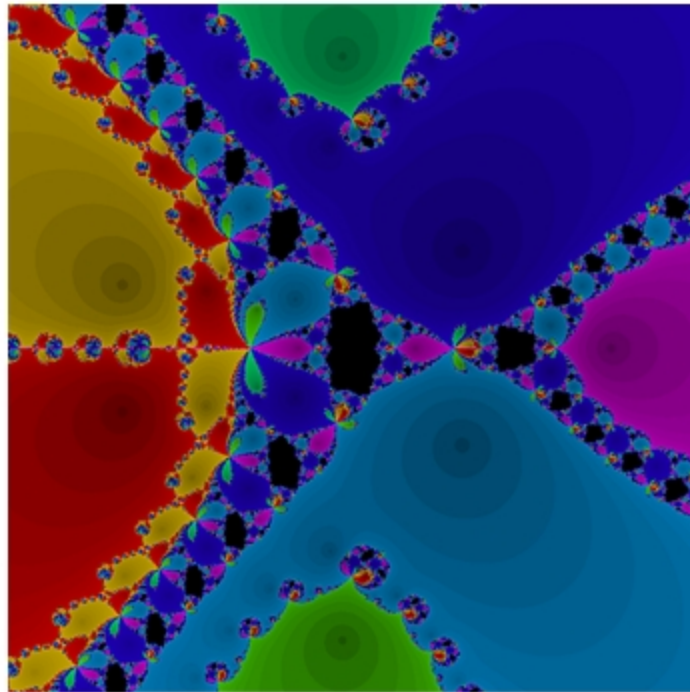
$$-1 + 3a_3 + 4a_4 + \dots + d a_d \neq 0 \quad (2.33)$$

entonces el polinomio  $p(z) = 1 - z + a_3 z^3 + \dots + a_d z^d$  tiene un 2 – ciclo atractor de la forma  $\{0, 1\}$ . Las condiciones (2.32) y (2.33) se verifican en un subconjunto abierto y denso de un hiper plano de  $\widetilde{\mathbb{P}}_d$ . Además, por definición de ciclo atractor, existe un abierto  $V \subset \widehat{\mathbb{C}}$ , que es precisamente la cuenca de atracción del ciclo, la cual tiene medida positiva.

■

Con el Teorema 2.4, disponemos de un modo sistemático de generar polinomios  $p$  para los cuales su función de iteración  $N_p$  tiene al origen como

punto periódico atractor. La Figura 2-7 muestra el resultado de la elección particular  $\{a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\} = \{1, 0, 0, 0, -1/6\}$ .



**Figura 2-7 Cuencas de Atracción de  $1 - z + z^3 - z^7/6$**

Podríamos entonces preguntar acerca de que si el método de Newton falla solamente ante la presencia de ciclos atractores. De (1.5), las cuencas de los  $k$  – ciclos (súper) atractores corresponden a cuencas (súper) atractoras. Como se verá en la sección 2.5, el conjunto de Julia de  $N_p$  es conexo, por lo que las componentes del conjunto de Fatou son simplemente conexas. Esto quiere decir que no puede haber anillos de Herman. Para los demás casos de la clasificación de Sullivan de los componentes del conjunto de Fatou, sólo

diremos que basta con saber que hay regiones en  $\mathbb{C}$  de medida positiva sobre los cuales el método de Newton no converge a una raíz de  $p$ .

## 2.4 PROPIEDADES ELEMENTALES DEL MÉTODO DE NEWTON

El siguiente teorema resume las propiedades elementales de la dinámica de  $N_p$ .

### Teorema 2.5

Sea  $p \in \mathbb{P}_d$  y  $N_p(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z)}$ . Entonces

- (a)  $N_p(r) = r \Leftrightarrow p(r) = 0 \vee r = \infty$ , es decir, los puntos fijos son los ceros de  $p$  y el punto infinito.
- (b) Si  $r$  es una raíz de  $p$  con multiplicidad  $m \geq 1$ , entonces es un punto fijo súper atractor de  $N_p$  si  $m = 1$ , pero solamente atractor si  $m > 1$ . El punto  $z = \infty$  es un punto fijo repulsor de  $N_p$ .
- (c) El grado de  $N_p$  indica el número de raíces distintas de  $p$ . De este modo,  $\text{grad}(N_p) \leq \text{grad}(p)$ , donde la igualdad se cumple cuando  $p$  tiene todos sus ceros distintos.
- (d) Los puntos críticos de  $N_p$  son las raíces simples y los puntos de inflexión de  $p$ .
- (e) Los puntos críticos de  $p$  son los polos de  $N_p$ .

### Demostración

Para la parte (a), sea  $p(z) = (z-r)^m Q(z)$ , donde  $Q(r) \neq 0$ . Entonces

$p'(z) = m(z-r)^{m-1} Q(z) + (z-r)^m Q'(z)$  de modo que

$$\frac{p(z)}{p'(z)} = \frac{(z-r)^m Q(z)}{m(z-r)^{m-1} Q(z) + (z-r)^m Q'(z)} = \frac{(z-r)Q(z)}{mQ(z) + (z-r)Q'(z)}$$

Por tanto  $N_p(r) = r - \frac{p(r)}{p'(r)} = r$ . El Teorema 2.3 muestra que  $z = \infty$  es

punto fijo repulsor de  $N_p$  con multiplicador  $\lambda_\infty = \frac{d}{d-1}$ . Sea  $z = r_j$  un cero de

$p$  con multiplicidad  $m_j$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$  donde  $n$  es el número de raíces distintas

de  $p$ . De (2.20)

$$N_p'(r_j) = \frac{(m_j L_j(z) - L_j(z))(m_j L_j(z))}{(m_j L_j(z))^2} = \frac{m_j - 1}{m_j} < 1 \quad (2.34)$$

De este modo se demuestra (b). Además (2.17) muestra que el grado de  $N_p$

es igual al número de raíces diferentes de  $p(z)$  obteniéndose con esto la

afirmación (c). Para (d) y (e), vemos de (2.30) que

$$N_p'(z) = 0 \Leftrightarrow p(z) = 0 \vee p''(z) = 0.$$

■

Los puntos de inflexión se denominan *puntos críticos libres*, pues no son raíces de  $p$ . Según el Teorema 1.7 y la parte (d) hay  $d - 2$  de estos puntos.

Además, la parte (a) corresponde a la aplicación del Teorema 1.2 al método de Newton como caso particular; así, los  $\text{grad}(N_p) + 1$  puntos fijos diferentes corresponden al punto infinito y a las raíces diferentes de  $p$ . Además, según el Teorema 1.12 – XIV, dado que  $N_p$  tiene sólo un punto repulsor, entonces  $\mathcal{J}(N_p)$  es conexo.

Las propiedades descritas en el Teorema 2.5 caracterizan completamente al método de Newton en el siguiente sentido:

### **Teorema 2.6**

Sea  $R \in \mathfrak{R}_n$ .  $R$  es conjugada a  $N_p$ , para algún  $p \in \mathbb{P}_d$ , si y sólo si  $R$  tiene

$$n \text{ distintos puntos fijos } \{\gamma_i\}_{i=1}^n \text{ con multiplicadores } \{\lambda_{\gamma_i}\}_{i=1}^n = \left\{ \frac{m_i - 1}{m_i} : m_i \in \mathbb{N} \right\}$$

### *Demostración*

El Teorema 2.5 muestra la implicación de la bicondicional.

Para el replicador, el Teorema 1.2 muestra que  $R$  tiene  $n+1$  puntos fijos.

Sea  $\gamma_{n+1} = \infty$  el restante punto fijo. De los  $n$  primeros se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n+1} \iota(R, r_i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 - \frac{m_i - 1}{m_i}} + \frac{1}{1 - \} r_{n+1}} = 1$$

Por otro lado, sea  $d = \sum_{i=1}^n m_i$ , entonces

$$d + \frac{1}{1 - \} r_{n+1}} = 1 \Rightarrow \} r_{n+1}} = \frac{d}{d-1} > 1$$

De donde,  $r_{n+1}$  es un punto fijo repulsor. Si  $r_{n+1} \neq \infty$ , re escalamos a  $R$  para

que  $r_{n+1} = 0$  y luego componemos con la transformación de Möbius  $z \mapsto \frac{1}{z}$ .

De esta manera obtenemos una función racional  $\tilde{R}$  conjugada con  $R$  que tiene a  $z = \infty$  como punto repulsor y a  $\{\tilde{r}_i\}_{i=1}^n$  como puntos fijos. Notar que los índices holomorfos de los puntos fijos permanecen invariantes.

Además, sea  $\tilde{R}(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$  donde  $\text{grad}(Q) < \text{grad}(P) = n$ . Entonces

$$\tilde{R}(z) - z = \frac{P(z) - zQ(z)}{Q(z)}$$

El polinomio  $h(z) := P(z) - zQ(z)$  cumple con  $h(\tilde{r}_i) = 0$ , pues

$$0 = \tilde{R}(\tilde{r}_i) - \tilde{r}_i = \frac{P(z) - zQ(z)}{Q(z)}, \text{ para } i = 1, \dots, n \text{ y además, } \text{grad}(h) \leq n. \text{ Si}$$

$\text{grad}(h) < n$  se tiene que<sup>2</sup>  $h(z) \equiv 0$ , y esto implica que  $\tilde{R}(z) = z$  lo cual es un absurdo ya que la cantidad de puntos fijos de  $\tilde{R}$  es la misma que la de  $R$ . Entonces  $\text{grad}(h) = n$  lo que implica que  $h(z) = aL(z)$ , donde  $L(z)$  está definido en (2.18) y  $a \in \mathbb{C}$  alguna constante. Luego

$$\tilde{R}(z) = z + \frac{aL(z)}{Q(z)} \quad (2.35)$$

Derivando (2.35) y evaluando en  $z = \tilde{r}_i$  se tiene

$$\begin{aligned} \}_{r_i} = \tilde{R}'(z) \Big|_{z=\tilde{r}_i} &= 1 + \frac{aL'(z)Q(z) - L(z)Q'(z)}{Q^2(z)} \Big|_{z=\tilde{r}_i} \\ &= 1 + \frac{aL'(\tilde{r}_i)}{Q(\tilde{r}_i)} = 1 - \frac{1}{m_i} \end{aligned}$$

De donde

$$Q(\tilde{r}_i) = -m_i a L'(\tilde{r}_i) = -m_i a L_i(\tilde{r}_i) \quad (2.36)$$

Sea  $S(z) := Q(z) + a \sum_{i=1}^n m_i L_i(z)$ , donde  $L_i(z)$  está definido como en (2.19).

Por tanto  $\text{grad}(S) \leq n-1$  y de (2.36) cumple que

$$S(\tilde{r}_i) = Q(\tilde{r}_i) + a \sum_{i=1}^n m_i L_i(\tilde{r}_i) = -m_i a L_i(\tilde{r}_i) + m_i a L_i(\tilde{r}_i) = 0$$

para toda  $i = 1, \dots, n$ .

---

<sup>2</sup> Un polinomio de grado menor a  $n$  que tiene  $n$  ceros es idénticamente nulo

Es decir, tiene  $n$  ceros y por lo tanto  $S(z) \equiv 0$ . Luego,

$$Q(z) = -a \sum_{i=1}^n m_i L_i(z) \quad (2.37)$$

Reemplazando (2.37) en (2.35) se llega a

$$\tilde{R}(z) = z - \frac{L(z)}{\sum_{i=1}^n m_i L_i(z)} \quad (2.38)$$

Definamos  $p(z) := a \prod_{i=1}^n (z - \tilde{r}_i)^{m_i}$ . Según (2.17), (2.38) queda de la forma

$$\tilde{R}(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z)}$$

■

El siguiente teorema nos permite restringir la ubicación de las raíces de  $p$  (Marden, 2014).

### Teorema 2.7

Todas las raíces de  $p(z) = \sum_{k=0}^d a_k z^k$ ,  $a_d \neq 0$ , están en el círculo

$$|z| < 1 + \max_{0 \leq k \leq d-1} \left| \frac{a_k}{a_d} \right| \quad (2.39)$$



### Demostración

Se tiene que  $|p(z)| = |a_d z^d + a_{d-1} z^{d-1} + \dots + a_1 z + a_0|$ .

Aplicando la desigualdad triangular,  $\left| a_d z^d - (a_{d-1} z^{d-1} + \dots + a_1 z + a_0) \right| \leq |p(z)|$ ,

es decir,

$$|p(z)| \geq |a_d| |z|^d - (|a_{d-1}| |z|^{d-1} + \dots + |a_1| |z| + |a_0|)$$

Sea  $E := \max_{0 \leq k \leq d-1} \left\{ \frac{|a_k|}{|a_d|} \right\}$ . Entonces

$$|p(z)| \geq |a_d| |z|^d \left[ 1 - \left( \frac{|a_{d-1}|}{|a_d|} |z|^{-1} + \dots + \frac{|a_1|}{|a_d|} |z|^{-d+1} + \frac{|a_0|}{|a_d|} |z|^{-d} \right) \right]$$

$$\geq |a_d| |z|^d \left[ 1 - E (|z|^{-1} + \dots + |z|^{-d+1} + |z|^{-d}) \right]$$

$$> |a_d| |z|^d \left[ 1 - E (|z|^{-1} + |z|^{-2} + |z|^{-3} + \dots) \right]$$

Suponiendo que  $|z| > 1$ , la serie geométrica anterior converge, por tanto,

$$|p(z)| > |a_d| |z|^d \left[ 1 - \frac{E}{|z|-1} \right] = |a_d| |z|^d \left( \frac{|z|-1-E}{|z|-1} \right)$$

Luego, si  $|z| \geq 1+E$  entonces  $p(z) > 0$ , por lo tanto en el exterior de (2.39)

no hay ceros de  $p$ .

■

Para  $p \in \mathbb{P}_d$  de la forma

$$p(z) = a_d z^d + a_{d-1} z^{d-1} + \dots + a_1 z + a_0 = \prod_{j=1}^n (s_j z - \dagger_j)^{m_j} \quad (2.40)$$

cuyas raíces son  $z_j = \frac{\dagger_j}{s_j}$ , al considerar la transformación  $z \mapsto Mz$ , donde

$$M := 1 + \max_{0 \leq k \leq d-1} \left| \frac{a_k}{a_d} \right| \quad (2.41)$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} p_1(z) &:= p(Mz) = a_d M^d z^d + a_{d-1} M^{d-1} z^{d-1} + \dots + M a_1 z + a_0 \\ &= \prod_{j=1}^n (M s_j z - \dagger_j)^{m_j} \end{aligned}$$

Así pues, las nuevas raíces son  $\widetilde{z} = \frac{\dagger_j}{M s_j}$ . Entonces de (2.39),  $|\widetilde{z}| < 1$  ya

que  $\left| \frac{\dagger_j}{s_j} \right| < M$ , es decir, estas raíces están en  $\mathbb{D}^1$ .

Una vez halladas, multiplicamos a las raíces de  $p_1(z)$  por  $M$ , lo cual de acuerdo al Teorema 1.1 no afecta a la dinámica, y recuperamos las raíces originales.

## Ejemplo 2.2 Normalización de raíces

A modo de ilustración, consideremos el polinomio

$$p(z) = (z - (2 + i))(2z - (7 - 5i))((1 + i)z - 10)(z - 7)$$

Todas las raíces están fuera de  $\mathbb{D}^1$ .

Expandiendo el polinomio a la forma usual nos queda

$$p(z) = a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

donde

$$\begin{array}{ll} a_4 = 2 + 2i & |a_4| = 2\sqrt{2} \\ a_3 = -48 - 22i & |a_3| = 2\sqrt{697} \\ a_2 = 370 + 42i & |a_2| = 2\sqrt{34666} \\ a_1 = -1114 + 128i & |a_1| = 2\sqrt{314345} \\ a_0 = 1330 - 210i & |a_0| = 70\sqrt{370} \end{array}$$

De acuerdo a (2.41),  $M = 1 + 35\sqrt{185}$ . Evaluando el polinomio en  $Mz$

llegamos a

$$q(w) = b_4 w^4 + b_3 w^3 + b_2 w^2 + b_1 w + b_0$$

donde

$$\begin{aligned}
 b_4 &= 1.035835858715435 \times 10^{11} + 1.035835858715435 \times 10^{11} i \\
 b_3 &= -(5.211190466202209 \times 10^9 + 2.388462297009346 \times 10^9 i) \\
 b_2 &= 8.420389808617625 \times 10^7 + 9558280.323295683 i \\
 b_1 &= -531435.3351355949 + 61062.587879134786 i \\
 b_0 &= 1330 - 210 i
 \end{aligned}$$

Luego, las raíces de  $q(w)$  y sus módulos son

$$\begin{aligned}
 r_1 &= 0.004192 + 0.002096 i \Rightarrow |r_1| = 0.004687 \\
 r_2 &= 0.010481 - 0.010481 i \Rightarrow |r_2| = 0.014822 \\
 r_3 &= 0.007337 - 0.005240 i \Rightarrow |r_3| = 0.009016 \\
 r_4 &= 0.014673 \Rightarrow |r_4| = 0.014673
 \end{aligned}$$

Multiplicando por  $M$  tenemos las raíces del polinomio original

=====

De ahora en adelante consideraremos polinomios con sus raíces contenidas en  $\mathbb{D}^1$ . A dicho espacio lo denotaremos mediante  $\mathbb{P}_d^1$ .

Sobre la ubicación de los puntos críticos, tenemos el siguiente teorema

### Teorema 2.8

*Para cualquier polinomio  $p(z)$ , la envoltura convexa de los ceros de  $p$  contiene a todos sus puntos críticos, así como también a los ceros de todas las derivadas de orden superior del polinomio.*

#### Demostración

Sea  $p(z) = \prod_{k=1}^n (z - r_k)^{m_k}$  con  $\sum_{k=1}^n m_k = d$  y  $r_k \neq r_j$  si  $k \neq j$ . Denotemos mediante  $M_p := p^{-1}(0)$  y  $c(M_p) := \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k r_k : \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 \right\}$  a su envoltura convexa.

Basta demostrar que los ceros de  $p'(z)$  están en  $c(M_p)$ . Trivialmente,

$p(r_k) = 0 \Rightarrow r_k \in c(M)$ . Sea  $w \notin M_p$  un cero de  $p'(z)$ , es decir,  $w \in M_{p'}$ .

De acuerdo a (2.16)

$$\frac{p'(w)}{p(w)} = \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{w - r_k} = 0$$

Entonces

$$\sum_{k=1}^n \frac{m_k}{w - r_k} = \sum_{k=1}^n \frac{m_k \overline{(w - r_k)}}{(w - r_k) \overline{(w - r_k)}} = \sum_{k=1}^n \frac{m_k \overline{(w - r_k)}}{|w - r_k|^2} = 0$$

Luego,

$$\sum_{k=1}^n \frac{m_k \bar{w}}{|w - r_k|^2} = \sum_{k=1}^n \frac{m_k \bar{r_k}}{|w - r_k|^2}$$

$$w \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{|w - r_k|^2} = \sum_{k=1}^n \frac{m_k r_k}{|w - r_k|^2}$$

Despejando  $w$ , tenemos que

$$w = \sum_{k=1}^n \frac{m_k r_k}{|w - r_k|^2 \sum_{t=1}^n \frac{m_t}{|w - r_t|^2}} = \sum_{k=1}^n \} _k r_k$$

donde  $\} _k = \frac{m_k}{|w - r_k|^2 \sum_{t=1}^n \frac{m_t}{|w - r_t|^2}}$  satisface

$$\sum_{k=1}^n \} _k = \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{|w - r_k|^2 \sum_{t=1}^n \frac{m_t}{|w - r_t|^2}} = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{m_k}{|w - r_k|^2}}{\sum_{t=1}^n \frac{m_t}{|w - r_t|^2}} = 1$$

Por lo tanto,  $w \in c(M_p)$ .

Así pues, hemos demostrado que  $M_{p'} \subset c(M_p)$ . Procediendo de forma

inductiva,  $M_{p^{(n+1)}} \subset c(M_{p^{(n)}}) \subset \dots \subset c(M_p)$ .

■

En particular, los puntos críticos de  $N_p$ , que según el Teorema 2.5 son los ceros de  $p$  y  $p''$ , están contenidos en la circunferencia unitaria.

## 2.5 ESTRUCTURA DE LAS CUENCAS DE ATRACCIÓN

Los siguientes lemas nos permitirán estudiar las cuencas de atracción de  $N_p$

El primero de ellos describe el comportamiento de  $N_p$  en los exteriores de  $\mathbb{D}^1$

### Teorema 2.9

$$\bigwedge_{|z| \geq 1} \left| N_p(z) - \frac{d-1}{d} z \right| < \frac{1}{d} \wedge |N_p(z)| < |z| \quad (2.42)$$

*Demostración*

Sea  $p(z) = \prod_{i=1}^d (z - r_i) \in \mathbb{P}_d^1$ , donde las  $r_i \in \mathbb{C}$  no son necesariamente

distintas. Entonces, de (2.16)

$$N_p(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z)} = z - \frac{1}{\sum_{i=1}^d \frac{1}{z - r_i}} \quad (2.43)$$

Además,  $|(z - r_i) - z| = |r_i| < 1$ , por lo que  $z - r_i \in D(z, 1)$ , donde  $D(z, 1)$  es

el disco abierto con centro en  $z$  y radio 1. Dado que  $|0 - z| \geq 1$  por hipótesis,

$0 \notin D(z, 1)$ ; entonces, es posible definir el dominio

$$D' := \left\{ w \in \mathbb{C} : \frac{1}{w} \in D(z, 1) \right\}.$$

Vamos a fijar  $z_0 = x_0 + i y_0$  y consideremos la circunferencia

$$|z - z_0| = 1 \quad (2.44)$$

La ecuación en el  $z$  – plano de esta circunferencia es

$$x^2 + y^2 + Bx + Cy = D \quad (2.45)$$

Completando cuadrados en (2.45), se tiene la ecuación equivalente

$$\left(x + \frac{B}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{C}{2}\right)^2 = \frac{B^2 + C^2 + 4D}{4} \quad (2.46)$$

Entonces, de (2.44) y (2.46)

$$x_0 = -\frac{B}{2}; y_0 = -\frac{C}{2}; \frac{B^2 + C^2 + 4D}{4} = 1 \quad (2.47)$$

Apliquemos la transformación de Möbius

$$z = x + iy \mapsto w = \frac{1}{z} = u + iv \quad (2.48)$$

Las distintas variables quedan relacionadas mediante

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}; v = -\frac{y}{x^2 + y^2}; u^2 + v^2 = \frac{1}{x^2 + y^2} \Rightarrow |w| = \frac{1}{|z|} \quad (2.49)$$

De modo que la circunferencia (2.45) se transforma mediante (2.48) en

$$u^2 + v^2 - \frac{B}{D}u + \frac{C}{D}v = \frac{1}{D} \quad (2.50)$$

Completando cuadrados nuevamente, (2.50) es equivalente a

$$\left(u - \frac{B}{2D}\right)^2 + \left(v + \frac{C}{2D}\right)^2 = \frac{B^2 + C^2 + 4D}{4D^2} = r^2 \quad (2.51)$$



Empleando (2.47), el radio de (2.51) es

$$r^2 = \left( \frac{1}{D} \right)^2 \Rightarrow r = \left| \frac{1}{D} \right|$$

Además, de las mismas relaciones en (2.47)

$$D = 1 - \frac{B^2 + C^2}{4} = 1 - (x_0^2 + y_0^2) = 1 - |z_0|^2 = 1 - \frac{1}{|w_0|^2}$$

Por tanto, de (2.47) y (2.49), las coordenadas del centro de (2.51) son

$$u^* = \frac{B}{2D} = \frac{-2x_0}{2 \left( 1 - \frac{1}{|w_0|^2} \right)} = - \frac{\frac{u_0}{|w_0|^2}}{\frac{|w_0|^2 - 1}{|w_0|^2}} = \frac{u_0}{1 - |w_0|^2} \quad (2.52)$$

$$v^* = -\frac{C}{2D} = \frac{2y_0}{2 \left( 1 - \frac{1}{|w_0|^2} \right)} = - \frac{\frac{v_0}{|w_0|^2}}{\frac{|w_0|^2 - 1}{|w_0|^2}} = \frac{v_0}{1 - |w_0|^2} \quad (2.53)$$

Dado que las transformaciones de Möbius conservan circunferencias,  $D'$  es un disco pues  $\partial D'$  corresponde a la transformación mediante (2.48) de (2.44)

De este modo, si  $z_0 - r_i \in D(z_0, 1)$  entonces  $(z_0 - r_i)^{-1} \in D'$ , es decir, según (2.52) y (2.53),

$$\left| (z_0 - r_i)^{-1} - \frac{u_0 + iv_0}{1 - |w_0|^2} \right| < \left| \frac{|w_0|^2}{|w_0|^2 - 1} \right|$$

$$\left| (z_0 - r_i)^{-1} - \frac{w_0}{1 - |w_0|^2} \right| < \frac{|w_0|^2}{1 - |w_0|^2} \quad (2.54)$$

Como (2.54) es válido para todas las raíces, sumamos esta desigualdad  $d$  veces y aplicando la desigualdad triangular se llega a

$$\left| \sum_{i=1}^d (z_0 - r_i)^{-1} - \frac{d w_0}{1 - |w_0|^2} \right| < \frac{d |w_0|^2}{1 - |w_0|^2} \quad (2.55)$$

Igual que antes, consideramos  $|z - z_0^*| = r_0$ . Así pues, (2.47) se transforma en

$$x_0^* = -\frac{B}{2}; y_0^* = -\frac{C}{2}; \frac{B^2 + C^2 + 4D}{4} = r_0^2 \quad (2.56)$$

De este modo, aplicando nuevamente (2.48), la circunferencia  $|z - z_0^*| = r_0$  se transforma en

$$\left( u - \frac{B}{2D} \right)^2 + \left( v + \frac{C}{2D} \right)^2 = \frac{B^2 + C^2 + 4D}{4D^2} = \left( \frac{r_0}{D} \right)^2 \quad (2.57)$$

Entonces, la imagen bajo (2.48) de la circunferencia

$$\left| z - \frac{d w_0}{1 - |w_0|^2} \right| = \frac{d |w_0|^2}{1 - |w_0|^2} = r_0 \quad (2.58)$$

es decir,

$$\left( x - \underbrace{\frac{d u_0}{1 - |w_0|^2}}_{x_0^*} \right)^2 + \left( y - \underbrace{\frac{d v_0}{1 - |w_0|^2}}_{y_0^*} \right)^2 = \left( \frac{d |w_0|^2}{1 - |w_0|^2} \right)^2 \quad (2.59)$$

es otra circunferencia cuyo radio es, según (2.57),

$$\left| \frac{r_0}{D} \right| = \left| \frac{\frac{d|w_0|^2}{1-|w_0|^2}}{\left( \frac{d|w_0|^2}{1-|w_0|^2} \right)^2 - (x_0^{*2} + y_0^{*2})} \right| = \left| \frac{\frac{d|w_0|^2}{1-|w_0|^2}}{\frac{d^2|w_0|^4}{(1-|w_0|^2)^2} - \frac{d^2(u_0^2 + v_0^2)}{(1-|w_0|^2)^2}} \right| = \frac{1}{d}$$

y cuyas coordenadas del centro son, usando nuevamente (2.57),

$$\begin{aligned} \frac{B}{2D} &= \frac{-2x_0}{2(r_0^2 - (x_0^{*2} + y_0^{*2}))} = \frac{\frac{-d u_0}{1-|w_0|^2}}{\frac{d^2|w_0|^4}{(1-|w_0|^2)^2} - \frac{d^2(u_0^2 + v_0^2)}{(1-|w_0|^2)^2}} \\ &= \frac{-u_0(1-|w_0|^2)}{d|w_0|^2(|w_0|^2 - 1)} = \frac{u_0}{d|w_0|^2} = \frac{x_0}{d} \\ \frac{-C}{2D} &= \frac{-(-2y_0)}{2(r_0^2 - (x_0^{*2} + y_0^{*2}))} = \frac{\frac{d v_0}{1-|w_0|^2}}{\frac{d^2|w_0|^4}{(1-|w_0|^2)^2} - \frac{d^2(u_0^2 + v_0^2)}{(1-|w_0|^2)^2}} \\ &= \frac{v_0(1-|w_0|^2)}{d|w_0|^2(|w_0|^2 - 1)} = \frac{-v_0}{d|w_0|^2} = \frac{y_0}{d} \end{aligned}$$

Es decir, el disco limitado por la circunferencia (2.58) se transforma en

$$\left| z - \frac{z_0}{d} \right| < \frac{1}{d} \quad (2.60)$$

En particular,  $\frac{1}{\sum_{i=1}^d \frac{1}{z_0 - r_i}} \in$  al conjunto definido en (2.60), es decir,

$$\left| \frac{1}{\sum_{i=1}^d \frac{1}{z_0 - r_i}} - \frac{z}{d} \right| < \frac{1}{d} \quad (2.61)$$

Lo que equivale, según (2.43), a

$$\left| z - N_p(z) - \frac{z}{d} \right| < \frac{1}{d}$$

$$\left| N_p(z) - \left( \frac{d-1}{d} \right) z \right| < \frac{1}{d}$$

Además,

$$|N_p(z)| = \left| z - \frac{z}{d} - \left( \frac{1}{\sum_{i=1}^d (z - r_i)^{-1}} - \frac{z}{d} \right) \right| < |z| \frac{d-1}{d} + \frac{1}{d} = |z| + \frac{1-|z|}{d} < |z|$$

■

El siguiente teorema muestra que en la vecindad de infinito,  $N_p$  tiene el mismo comportamiento dinámico que una función lineal.

### Teorema 2.10

Sea  $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ . Existe un dominio  $V \subset U$  y un isomorfismo conforme  $g : U \rightarrow V$  tal que  $N_p \circ g = id$  sobre  $U$ , donde  $V \supseteq \left\{z \in \mathbb{C} : |z| > \frac{d+1}{d-1}\right\}$ . Además, existe un mapeo uniforme  $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}$  que satisface  $\phi \circ N_p = \frac{d-1}{d}\phi$  sobre  $V$ .

### Demostración

La clave de la demostración consiste en adaptar el Teorema 1.3 a  $z = \infty$ . Dado que este punto fijo es repulsor, consideremos las órbitas pasadas de puntos con pre imágenes cercanas a  $\infty$ . De este modo, las iteraciones bajo la función inversa convergen a  $\infty$ , convirtiéndolo en atractor. Puesto que en general,  $N_p^{-1}$  es multiforme, denotemos mediante  $g$  a la rama de  $N_p^{-1}$  que fija a  $\infty$ . Por el Teorema 2.9, se tiene que

$$|g(z)| > |z| \quad (2.62)$$

por lo que en  $U$  no puede ocurrir que  $N_p'(z) = 0$  (de este modo la existencia de  $g$  queda garantizada por el teorema de la función inversa). Sea  $V := g(U)$ .

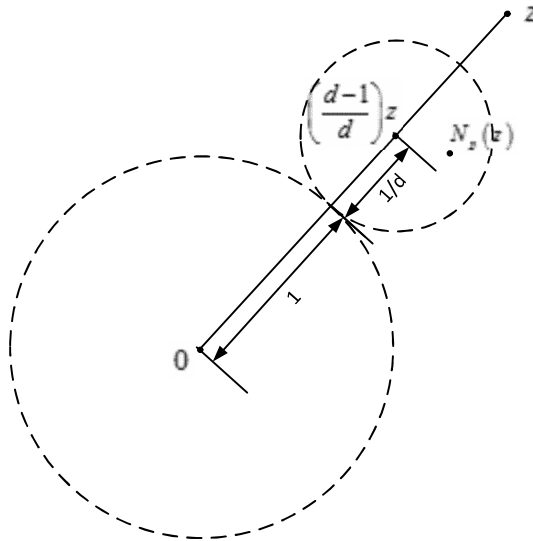
De la definición de  $U$ ,  $w \in V \Leftrightarrow |N_p(w)| > 1$ .

Si  $|z| > 1$ , (2.42) nos dice que  $N_p(z) \in D\left(\left(\frac{d-1}{d}\right)z, \frac{1}{d}\right)$ . Con la ayuda de la

Figura 2-8 podemos ver para que  $|N_p(z)| > 1$  se debe tener que

$$\left|\frac{d-1}{d}z\right| > 1 + \frac{1}{d}, \text{ de donde}$$

$$|z| > \frac{d+1}{d-1} > 1$$



**Figura 2-8 Condiciones para  $N_p(z) > 1$**

Por tanto,  $\left\{z \in \mathbb{C} : |z| > \frac{d+1}{d-1}\right\} \subseteq V \subset U$ . Para poder definir la  $n$ -ésima iterada

$g^n = N_p^{-n}$  es necesario prolongar analíticamente a lo largo de curvas, lo cual,

según el teorema de monodromía, es posible pues  $U \supset V$  es simplemente

conexo. Esto define únicamente a  $g$  sobre  $U$  con inversa holomorfa  $N_p$ , por lo que  $g : U \rightarrow V$  es un isomorfismo conforme.

Además, (2.62) muestra que  $g$  “estira” el módulo de  $|z|$ , y puesto que fija a  $\infty$ , para cada punto  $z \in U$ , se tiene que  $g^n(z) \rightarrow \infty$ . Del Teorema 1.3, de (2.62) y de (2.21),  $g$  cerca de  $\infty$  tiene el mismo comportamiento dinámico

que  $z \mapsto \frac{d}{d-1}z$ . Por tanto, cerca de  $\infty$  podemos escribir  $g(z) = O\left(\frac{d}{d-1}z\right)$

de modo que  $g^n(z) = O\left(\left(\frac{d}{d-1}\right)^n z\right)$ . Por tanto el mapeo  $\{ : U \rightarrow \mathbb{C}$  definido

por  $\{ (z) := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{d-1}{d}\right)^n g^n(z)$  es uniforme sobre  $U$  y cumple que

$$\{ (g(z)) = \left(\frac{d}{d-1}\right) \{ (z)$$

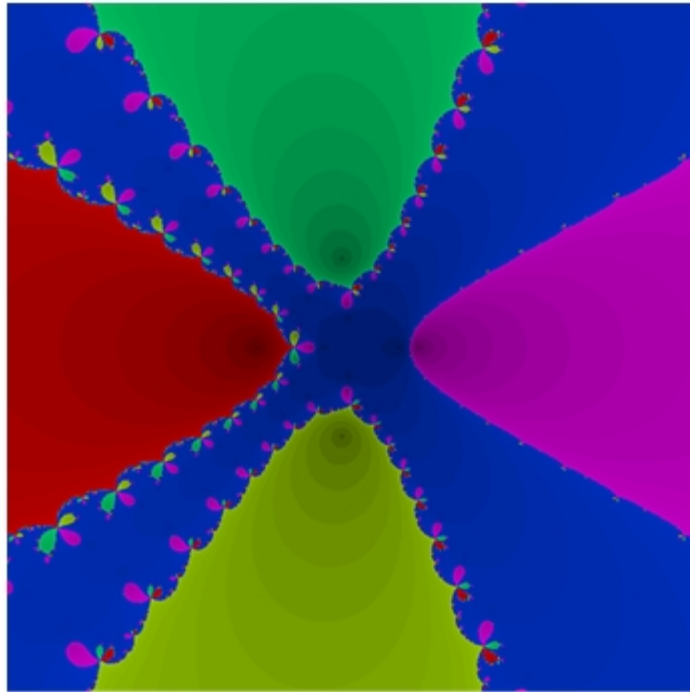
es decir,

$$\{ \circ g = \frac{d}{d-1} \circ \{ \Rightarrow \{ \circ \frac{d-1}{d} = \{ \circ N_p$$

■

La Figura 2-9 muestra las cuencas de atracción del método de Newton aplicado al polinomio  $p(z) = -2z^5 + 2z - 1$ . Se observa que las cuencas de atracción inmediatas parecen “ensancharse” a medida que nos alejamos de la región que contiene a las raíces. Observamos también que la cuenca de

atracción coloreada con azul tiene un comportamiento distinto a las cuencas de las demás raíces.



**Figura 2-9 Cuencas de atracción de  $-2z^5 + 2z - 1$**

El siguiente teorema prueba que efectivamente las cuencas de atracción inmediatas son no acotadas.

### **Teorema 2.11**

*Las cuencas de atracción inmediatas son no acotadas*

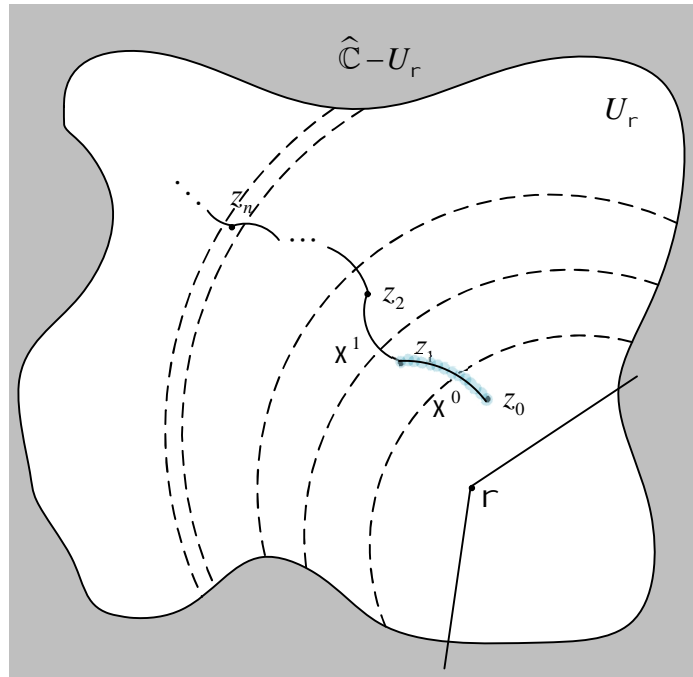
*Demostración*



Procediendo por el absurdo. Sea  $U_r$  la cuenca de atracción inmediata de la raíz  $r$ , la cual es como mínimo un punto fijo atractor, y sea  $Crit_{N_p}$  el conjunto de puntos críticos de  $N_p$ . Dado que  $Crit_{N_p}$  es finito,  $U_r$  contiene una cantidad finita de esos puntos y todos ellos son atraídos a  $r$ . Además, estos puntos son un subconjunto de los puntos de inflexión de  $p$ . Entonces siempre podemos elegir dos puntos distintos  $z_0, z_1 \in U_r - \{r\}$  de modo que  $N_p(z_1) = z_0$ . Por (2.42),  $|z_0| < |z_1|$ . Es más, ya que  $orb^+(Crit_{N_p} \cap U_r)$  es discreto y  $U_r$  es conexa, podemos unir  $z_0$  y  $z_1$  mediante una curva  $\chi^0 := [0,1] \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $\chi^0 \subset U_r - \overline{orb^+(Crit_{N_p} \cap U_r)}$ .

Sea  $h$  la rama local de  $N_p^{-1}$  que transforma  $z_0$  en  $z_1$ . Dado que  $orb^+(Crit_{N_p}) \cap \chi^0 = \emptyset$ ,  $h$  se puede extender analíticamente a lo largo de  $\chi^0$  excepto cuando  $\infty \in \chi^0$ , lo cual no puede ocurrir ya que se ha supuesto que  $U_r$  es acotada. Además, como  $N_p(z_1) = N_p(\chi^0(1)) = \chi^0(0) = z_0$  (ver Figura 2-10), exigimos que  $N_p(\chi^0(t+1)) = \chi^0(t)$  para  $t \in [0,1]$ . Es decir,  $\chi^0(t+1) = h(\chi^0(t))$ . Esto nos permite definir inductivamente  $\chi^n(t)$  mediante  $\chi^n(t) := h(\chi^{n-1}(t))$ , donde  $h$  representa ahora la extensión de la rama inicial a lo largo de la curva  $\bigcup_{k=0}^{n-1} \chi^k$ , es decir,

$$\chi^n(t) = \chi^{n-1}(t+1) = h^n(\chi^0(t)), \quad t \in [0,1] \quad (2.63)$$



**Figura 2-10 No acotamiento de las cuencas de atracción**

Sea  $x := \bigcup_{n=0}^{\infty} x^n$ . Observemos que según (2.42) existe una vecindad  $V$  de  $x^0$

tal que la distorsión de  $h^n$  está acotada sobre  $V$ , independientemente de  $n$ .

Es decir, el “ancho” de  $h^n(x^0)$  es finito.

Esto implica que el diámetro de  $x^n$  tiende a 0. Por tanto,

$$|z_n - z_{n+1}| = |z_n - h(z_n)| = |N_p(z_n) - z_n| \rightarrow 0, \text{ por lo que la sucesión } s := \{z_n\}$$

converge a un punto fijo que tendría que estar en  $\partial U_r$  y además tendría que

ser finito ya que  $U_r$  es acotada. Pero esto es una contradicción, porque

$\bigwedge_{n \geq 1} x^n \subset U_r - \overline{orb^+(Crit_{N_p} \cap U_r)}$ , por lo que ningún punto crítico finito de  $N_p$

puede ser punto de acumulación de  $s$ .

■

Dado que las cuencas inmediatas son no acotadas y el punto  $\infty$  es repulsor, entonces  $\infty \in \partial U_r$  para cada raíz  $z = r$ . Además, como  $\infty$  es el único punto repulsor, se sigue del Teorema – XIV, que  $\mathcal{J}(N_p)$  es conexo, por lo que todas las componentes de  $\mathcal{F}(N_p)$  son simplemente conexas. En particular, las cuencas inmediatas son simplemente conexas y podemos definir una clase de homotopía de curvas que unan a  $\infty$  con la raíz que contiene la cuenca inmediata. Estas clases de homotopía se denominan *accesos a infinito*. El número de tales accesos es el siguiente

### **Teorema 2.12**

Sea  $c_r := \#(Crit_{N_p} \cap U_r)$  contando multiplicidades. Entonces cada  $U_r$  tiene  $c_r$  accesos distintos a  $\infty$

### Demostración

Los puntos críticos de  $N_p$  son las raíces y los puntos de inflexión de  $p$ .

Trasladémonos a la esfera de Riemann, donde  $U_r$  es acotado. Para cada raíz

$r$ , se tiene que  $c_r \geq 1$ . Además,  $N_p|_{U_r}$  es propio ya que podemos tomar la

sucesión  $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$  definida mediante  $z_{n+1} = h(z_n)$ , donde  $h$  es como en el

Teorema 2.11, y separarla en dos sub sucesiones dependiendo si  $n$  es par o

no. Entonces  $\{z_{2k-1} = N_p(z_{2k})\}_{k=0}^{\infty}$  no converge a ningún punto de  $U_r$ .

Supongamos ahora que  $N_p|_{U_r}$  sea de grado  $k_a$ . Como  $U_r$  es simplemente

conexo, es decir, 1 – conexo, de la fórmula de Riemann – Hurwitz se tiene que

$$1 - 2 = k_r(1 - 2) + c_r \Rightarrow k_r = 1 + c_r.$$

Por el teorema del mapeo de Riemann, sea  $w: \mathbb{D}^1 \rightarrow U_r$  un isomorfismo

conforme que satisface  $w(0) = r$  y  $w'(0) > 0$ . Entonces  $g := w^{-1} \circ N_p \circ w$ , al

ser conjugado con  $N_p$ , es también propio y de grado  $c_r + 1$ . Se puede

extender este mapeo  $g: \mathbb{D}^1 \rightarrow \mathbb{D}^1$  a  $\tilde{g}: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ , la cual según (2.1) tendrá

exactamente  $c_r + 2$  puntos fijos contando multiplicidades.

Pero

$$\tilde{g}(0) = w^{-1}(N_p(w(0))) = w^{-1}(N_p(r)) = w^{-1}(r) = 0$$

$$\tilde{g}(\infty) = A^{-1}(\tilde{g}(A(\infty))) = A^{-1}(\tilde{g}(0)) = A^{-1}(0) = \infty$$

donde  $A(z) = \frac{1}{z}$ .

Además,

$$\begin{aligned}\tilde{g}'(0) &= \left[ (w^{-1})'(N_p(w(0))) \right] \left[ N_p'(w(0)) \right] w'(0) \\ &= \left[ (w^{-1})'(r) \right] N_p'(r) w'(0) = N_p'(r) < 1\end{aligned}\tag{2.64}$$

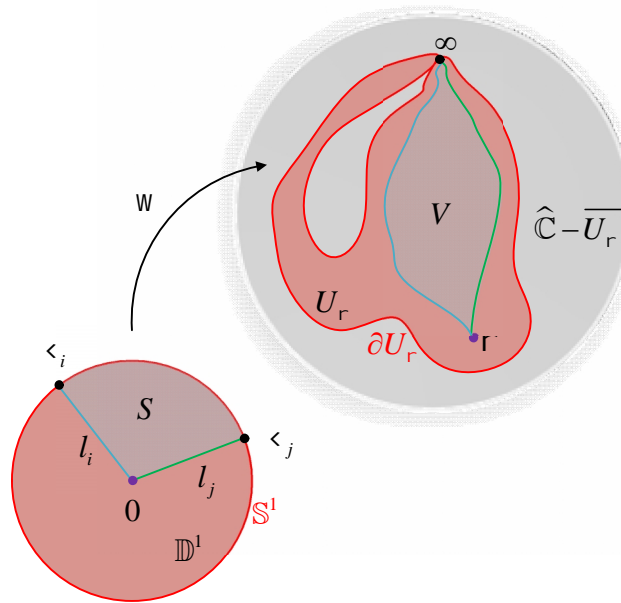
$$\tilde{g}'(\infty) = \left[ (A^{-1})'(0) \right] \left[ \tilde{g}'(0) \right] A'(\infty) = \tilde{g}'(0) < 1\tag{2.65}$$

Por tanto, dos de esos puntos, 0 e  $\infty$ , son puntos atractores, los cuales atraen  $\mathbb{D}^1$  y  $\hat{\mathbb{C}} - \overline{\mathbb{D}^1}$  respectivamente. Luego, los restantes  $c_r$  puntos fijos  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{c_r}$  necesariamente estarán sobre  $\mathbb{S}^1$  y deben ser repulsores. Como  $\mathbb{D}^1$  y  $\hat{\mathbb{C}} - \overline{\mathbb{D}^1}$  son completamente invariantes,  $\tilde{g}$  es un mapeo de cubrimiento de  $\mathbb{S}^1$  en  $\mathbb{S}^1$  de grado  $c_r + 1$ , por lo que los puntos  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{c_r}$  son distintos.

Dado que  $w : \mathbb{D}^1 \rightarrow U_r$  extiende continuamente  $\partial\mathbb{D}^1$  en  $\partial U_r$ , pues el conjunto de Julia es conexo, entonces estos  $c_r$  puntos fijos de  $\tilde{g}$  sobre  $\mathbb{S}^1$  serán transformados en  $c_r$  puntos fijos de  $\partial U_r$ . Como ya se comentó, el único punto fijo de  $N_p$  que está en  $\partial U_r$  es  $\infty$ , por lo que  $U_r$  se extiende a  $\infty$  en  $c_r$  diferentes direcciones.

Todas las curvas que convergen de forma no tangencial a un mismo punto fijo en  $\mathbb{S}^1$  son homotópicas a curvas que convergen no tangencialmente dentro de

$\mathbb{D}^1$  al mismo punto fijo. De este modo, cada punto fijo en  $\partial\mathbb{D}^1$  define un único acceso en  $U_r$  a  $\infty$ .



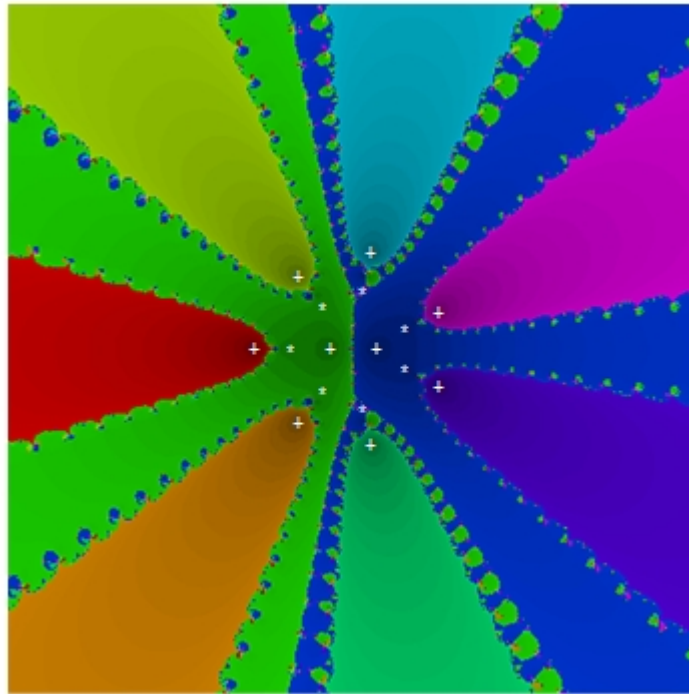
**Figura 2-11 Accesos a infinito**

Recíprocamente, sean  $l_i$  y  $l_j$  dos radios como en la Figura 2-11. Supongamos que sus imágenes  $w(l_i)$  y  $w(l_j)$  son homotópicas en  $U_r$ . Entonces fijando una cierta homotopía  $H$  se tiene que  $H(w(l_i(1)), 1) = H(w(l_j(1)), 1) = \infty$ . Luego uno de los componentes acotados por la curva de Jordan  $w(l_i) \cup w(l_j)$  estará contenida en  $U_r$ . Sea  $V$  esta componente y  $S := w^{-1}(V)$  como se muestra en la Figura 2-11. Ambos conjuntos  $V$  y  $S$  son dominios de Jordan

( $\partial V$  y  $\partial S$  son curvas de Jordan) y por el teorema de Caratheodory,  $w$  extiende homeomórficamente sus clausuras. Pero esto no es posible, pues no hay forma de transformar mediante  $w$  a la curva  $\mathbb{S}^1 \cap S$ . Por tanto, diferentes puntos fijos de  $\tilde{g}$  sobre  $\mathbb{S}^1$  generan curvas no homotópicas en  $U_r$ .

■

En la Figura 2-12 se ilustra el comportamiento global de método de Newton aplicado al polinomio  $z^9 - z^5 + 9z^2 - 1$ . Las raíces se marcan con “+” y los puntos de inflexión con “\*”.\*



**Figura 2-12 Geometría Global del método de Newton**

# CAPÍTULO 3

## CONSTRUCCIÓN DEL CONJUNTO DE INICIALIZACIÓN

### 3.1 INTRODUCCIÓN

La Figura 2-12 nos sugiere que para  $p \in \mathbb{P}_d^1$ , el método de Newton  $N_p$  Tiene un comportamiento “aburrido” en los exteriores de  $\overline{\mathbb{D}^1}$ . En efecto, los resultados expuestos en el capítulo 2 muestran que se tiene suficiente control en los exteriores de ese dominio. La observación básica es que toda circunferencia fuera de  $\overline{\mathbb{D}^1}$  y con centro en el origen intersectará a cada acceso a infinito. Si tomamos puntos en el exterior de  $\overline{\mathbb{D}^1}$  sobre alguna, o varias, de estas circunferencias, de modo que estén sobre los accesos a infinito de cada cuenca de atracción inmediata, y sobre éstos iteramos  $N_p$ , entonces tendríamos todas las raíces del polinomio en cuestión. En este capítulo se expondrán tres formas de construir tal conjunto, al que denotaremos mediante



$S_d$  . Un enfoque determinista (Hubbard, Schleicher, & Sutherland, 2001), uno probabilístico (Bollobás, Lackmann, & Schleicher, 2013) y un tercero que combina a ambos (Schleicher & Stoll, Newton's Method in practice: Finding all roots of polynomials of degree one million efficiently, 2015).

A continuación, se da el significado de las abreviaturas usadas en este capítulo:

Abreviatura	Enfoque	Significado
$S_d$		El conjunto semilla genérico.
$HS_d$	Determinista	Conjunto semilla definido por J.Hubbard
$SS_d$	Determinista	Conjunto semilla definido por D. Schleicher
$SPS_d$	Determinista	Conjunto semilla definido en forma práctica
$DS_d$	Probabilístico	Parte determinística del conjunto semilla probabilístico.
$PS_d$	Probabilístico	Parte probabilístico del conjunto semilla probabilístico
$HDS_d$	Híbrido	Conjunto semilla híbrido – determinista definido por D. Schleicher
$HPS_d$	Híbrido	Conjunto semilla híbrido – probabilístico

**Tabla 3-1 Diversas construcciones del conjunto semilla**

### 3.2 LOS CANALES DE UNA RAÍZ Y LAS R – ÓRBITAS CENTRALES

En lo sucesivo, consideraremos  $p \in \mathbb{P}_d^1$ .

#### Definición 3.1 **Canal de una raíz**

*Un canal de una raíz  $r$  de  $p$  es una componente conexa no acotada*

*$W \subset U_r - \overline{\mathbb{D}^1}$  con la propiedad de que existe un  $w \in W$  tal que  $w$  y  $N_p(w)$*

*pueden ser conectados con una curva contenida en  $W$ .*

Del Teorema 2.10, en los exteriores de  $\overline{\mathbb{D}^1}$ ,  $N_p$  prácticamente sólo contrae el módulo de los puntos de  $W$ . Como los accesos a infinito son simplemente conexos, cada acceso corresponde a un único canal y cada componente conexa no acotada de  $U_r - \overline{\mathbb{D}^1}$  es un canal. Además, como cada acceso a infinito fija a  $\infty$  mediante  $N_p$ , se sigue que si  $B$  es un canal de  $U_r$  entonces

$N_p(B) - \overline{\mathbb{D}^1} = B$ . Consideremos dos puntos  $x_1, x_2 \in B$  y definamos  $x_1 \sim x_2$  si

y sólo si  $\bigvee_{n \in \mathbb{Z}} N_p^n(x_1) = x_2$ . Es claro que  $\sim$  es una relación de equivalencia.

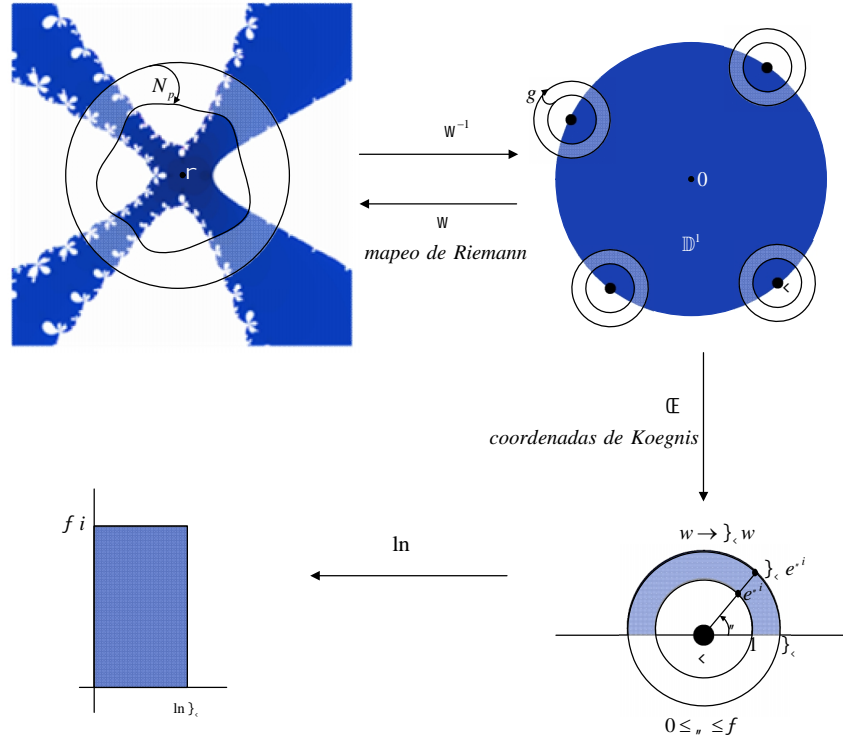
Definamos el espacio  $A := B / N_p$ . Este es el espacio en el cual se identifican

como uno solo a todos los puntos de la misma órbita. Como ya se mencionó,

$N_p$  se comporta como una contracción en  $U_r \supset B$ . Entonces podemos

averiguar el ancho de un canal utilizando la siguiente estrategia que se resume

en la Figura 3-1, la cual sigue la notación empleada en el Teorema 2.12.



**Figura 3-1 Estimación del módulo de un canal a infinito de  $N_p$  aplicado a un polinomio de grado 5**

**Fuente:** (Hubbard, Schleicher, & Sutherland, 2001)

Resumiendo la Figura 3-1, cada canal  $B = B_{\zeta}$ , y por tanto cada acceso a

infinito tiene módulo  $\frac{f}{\ln \gamma_{\zeta}}$ , donde  $\zeta$  es uno de los  $c_r$  puntos fijos del mapeo

$\tilde{g}$  definido en la demostración del Teorema 2.12 (los restantes dos son puntos fijos de  $\tilde{g}$  son 0 e  $\infty$ ).

De (1.2), (1.3), (2.64) y (2.65) se tiene

$$\sum_{\zeta \in \mathbb{S}^1} \frac{1}{\} \zeta - 1} = -1 + 2 \frac{1}{1 - \frac{m_r - 1}{m_r}} = 2m_r - 1 \geq 1 \geq \frac{1}{c_r} \quad (3.1)$$

Dado que los  $\zeta$  son repulsores y están en  $\mathbb{S}^1$ , entonces  $\bigwedge_{\zeta \in \mathbb{S}^1} \} \zeta = \tilde{g}'(\zeta) > 1$ ,

por lo que existe por lo menos un  $\zeta = \zeta_k$  que satisface

$$\frac{1}{\} \zeta_k - 1} \geq \frac{1}{c_r} \Rightarrow 1 \leq \} \zeta_k \leq c_r + 1 \Rightarrow 0 \leq \ln \} \zeta_k \leq \ln(c_r + 1)$$

es decir, el módulo del canal  $B_\zeta$  es  $\text{mod}(B_\zeta) := \frac{f}{\ln \} \zeta_k} \geq \frac{f}{\ln(c_r + 1)}$ .

Pero  $c_r + 1 = \text{grad}(N_p|_{U_r}) \leq \text{grad}(N_p) \leq d$ , por lo que  $\text{mod}(B_\zeta) \geq \frac{f}{\ln d}$ . Es

decir, se tiene el siguiente teorema.

### Teorema 3.1

*Si el número de puntos críticos de  $N_p$  en  $U_r$  es  $c_r$ , contando multiplicidades,*

*entonces  $U_r$  tiene un canal a infinito con módulo  $\sim \geq \frac{f}{\ln(c_r + 1)}$ . En particular,*

*cada cuenca de atracción tiene un canal con módulo  $\geq \frac{f}{\ln d}$ .*

Esto ocurre para una sola raíz  $r$ . Si  $m_r = 1$ , de (3.1) se tiene que  $\sum_{\zeta} \leq 2$  lo

que implica que  $\sum_{\zeta \in S^1} \text{mod}(B_{\zeta}) \geq \frac{f}{\ln 2}$ . Si  $m_r > 1$ , se tiene que

$$\sum_{\zeta \in S^1} \text{mod}(B_{\zeta}) = \sum_{\zeta \in S^1} \frac{f}{\ln \sum_{\zeta} \} \zeta} \geq \sum_{\zeta \in S^1} \frac{f}{\sum_{\zeta} \} \zeta - 1} = (2m_r - 1)f \geq \frac{m_r f}{\ln 2}$$

Por tanto, todos los módulos de todas las cuencas de todas las raíces suman

$$\text{como mínimo } \sum_r \frac{m_r f}{\ln 2} = \frac{df}{\ln 2}$$

Como menciona el Teorema 2.10, la parte interesante de la dinámica ocurre dentro de  $\mathbb{D}^1$ . Lamentablemente esto se traduce en una pérdida de control sobre  $N_p(z)$  ya que si está cerca de un punto crítico de  $p$ , el siguiente iterado estará cerca a  $\infty$  y tardará mucho en regresar a la vecindad de las raíces. Sin embargo, hay excepciones.

### **Definición 3.2** *$R$ – órbita central*

Sea  $R > 0$ . Una órbita  $\{z_n\}$  se llama  $R$  – central si y sólo si

$$\bigwedge_{m \geq n} |z_n| \leq 1 \Rightarrow |z_m| < R.$$

Es decir, tales órbitas evitan a los puntos críticos del polinomio dado que siempre permanecen en  $D(0, R)$ .

Consideremos ahora la curva central de  $A := B / N_p$  la cual, tiene longitud

hiperbólica<sup>3</sup> de  $\frac{f}{\sim}$ , siendo  $\sim := \text{mod}(B)$ . Se denomina *sub anillo central* de

$A$  al conjunto de sus puntos con radio de inyectividad menor que  $\frac{2f}{\sim}$ . A la

preimagen bajo  $w^{-1}$  de dicho sub anillo central se le denomina *sub canal*

*central*. El sub anillo central de  $A$  tiene módulo mayor que  $\frac{2\sim}{3}$  (lema 5 de

(Schleicher, On the efficient global dynamics of Newton's Method for complex polynomials, 2013))

El siguiente teorema, (Schleicher, On the efficient global dynamics of Newton's Method for complex polynomials, 2013), da cotas en el tamaño de  $R$  que garantizan la existencia de órbitas centrales y muestra dónde podemos encontrarlas ( $d_{U_r}$  es la métrica hiperbólica restringida a  $U_r$ )

### Teorema 3.2

Si  $\bigwedge_{B_\zeta \subset U_r} \text{mod}(B_\zeta) = \sim \geq \frac{f}{\ln d}$  y  $z \in U_r$  satisface  $d_{U_r}(z, N_p(z)) < \frac{2f}{\sim}$  entonces

$\text{orbit}^+(z)$  es  $R$  – central para  $R \leq 5 \left( \frac{d}{d-1} \right)^{\lceil 5f(\ln d + 1) \rceil}$  y lo mismo es cierto para

todos los puntos en la geodésica hiperbólica que une  $z$  con  $N_p(z)$ . Además,

---

<sup>3</sup> Con respecto a la métrica  $\frac{2|dw|}{1-|w|^2}$

si  $B_{\zeta}$  tiene módulo máximo, entonces todos los puntos en el canal subcentral de  $B_{\zeta}$  tienen órbitas  $R$  – centrales.

### 3.3 EL ENFOQUE DETERMINISTA

A continuación se exponen los resultados mostrados en (Hubbard, Schleicher, & Sutherland, 2001) y (Schleicher, On the efficient global dynamics of Newton's Method for complex polynomials, 2013), los cuales se denominan deterministas pues exigen que cada canal de cada raíz contenga un elemento del conjunto de inicialización. La base de los cálculos es el siguiente lema (lema 10 de (Hubbard, Schleicher, & Sutherland, 2001)), el cual describe el dominio fundamental de  $N_p$ .

#### Lema 3.3

$$\bigwedge_{R > \frac{d+1}{d-1}} \bigvee_{| \in (0,1)} V_{R,|,d} := \left\{ z \in \mathbb{C} : R \left( \frac{d-1}{d} \right)^{|} < |z| < R \right\} \text{ está contenido en un solo}$$

dominio fundamental de la dinámica de  $N_p$ . Además,  $\lim_{R \rightarrow \infty} | = 1$

Dado que  $\frac{d-1}{d} < 1$ , el número  $|$  mide el grosor del anillo redondo,

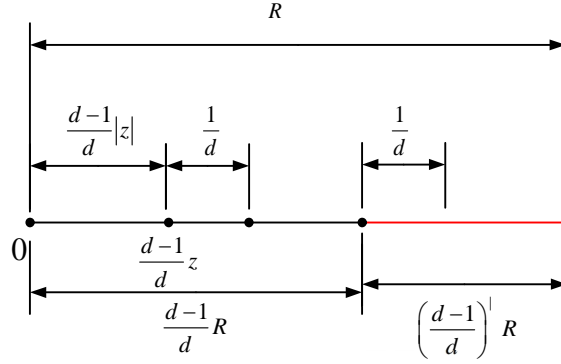
geométrico, que está dentro de una sola aplicación de  $N_p$  a la circunferencia

$S(R) := \{ z \in \mathbb{C} : |z| < R \}$ , que llamaremos  $S'(R) := N_p(S(R))$  la cual, según el

Teorema 2.10, es una curva simple cerrada. La región entre  $S(R)$  y  $S'(R)$

es lo que se denomina *dominio fundamental de la dinámica de  $N_p$* . De la

Figura 2-8 , se tiene que  $|N_p(z)| \leq \frac{d-1}{d}|z| + \frac{1}{d} < \frac{d-1}{d}R + \frac{1}{d}$ .



**Figura 3-2 Relación entre  $R, \kappa$  y  $d$**

Dado que  $\frac{d-1}{d} < 1$ , el gráfico lineal de la Figura 3-2 muestra que

$$\bigvee_{l \in (0,1)} R \left( \frac{d-1}{d} \right)^l \geq \frac{d-1}{d} R + \frac{1}{d} \quad (3.2)$$

Tomando logaritmos en (3.2), tenemos

$$| \leq \frac{\left| \ln \left( \frac{d-1}{d} + \frac{1}{Rd} \right) \right|}{\left| \ln \left( \frac{d-1}{d} \right) \right|} \quad (3.3)$$

Dado que  $\lim_{R \rightarrow \infty} | = 1$ , las estimaciones serán más precisas para  $R$  mucho mayor que 1. Sin embargo esto tiene un costo computacional ya que la rapidez



de convergencia a la raíz será más lenta a medida que nos alejamos de  $\mathbb{D}^1$ .

Si elegimos un valor particular de  $|z|$ , usamos (3.3) para estimar a partir de qué

valor de  $R$  podemos usarlo (Tener presente que  $R > \frac{d+1}{d-1}$ ). Por ejemplo, si

$|z| = \frac{1}{2}$  entonces

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\left| \ln \left( \frac{d-1}{d} + \frac{1}{Rd} \right) \right|}{\left| \ln \left( \frac{d-1}{d} \right) \right|} \quad (3.4)$$

Ahora hacemos variar  $d$  en (3.4). En la Figura 3-3, la línea roja vertical

representa al valor  $R = \frac{d+1}{d-1}$ . Para los valores a la derecha de este valor, el

Lema 3.3 funciona. Observamos que para  $d \geq 2$  la elección de  $|z| = 0.5$  está

permitida (en todo caso para  $d \geq 3$  el valor correspondiente a  $R$  también está

permitido). Para calcular las coordenadas del punto con abscisa 0.5 nos

fijamos que para  $d = 2$ , dicho punto corta a la curva azul en:

$$\frac{1}{2} = \frac{\left| \ln \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2R} \right) \right|}{\left| \ln \frac{1}{2} \right|} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{R+1}{2R} \Rightarrow R = \sqrt{2} + 1$$

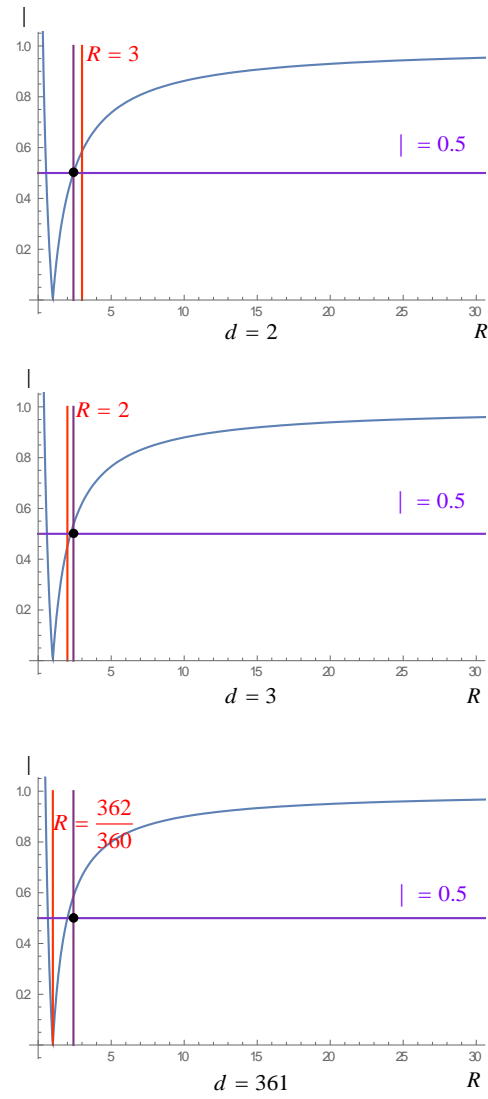
Es decir, independientemente del grado, para  $R \geq \sqrt{2} + 1$  siempre podemos

elegir  $|z| = 0.5$  (como ya se mencionó, puede elegirse otros valores cercanos a

1, pero se demorará más en llegar a la región donde se encuentran las raíces).

Es en  $V_{\sqrt{2}+1, \frac{1}{2}, d} := \left\{ z \in \mathbb{C} : R\sqrt{\frac{d-1}{d}} < |z| < R \right\}$  donde se construye el conjunto

de inicialización  $S_d$ .



**Figura 3-3 Valores permitidos para**

Como ya sabemos que cada canal tiene un ancho mínimo, entonces en este anillo se distribuyen suficientes puntos con el propósito de que por lo menos uno de ellos esté en cada canal. Se podrían distribuir en una sola circunferencia centrada en el origen, pero podría ocurrir (como se verá en la siguiente sección) que una raíz tenga muchos canales a infinito. Estos canales serán individualmente angostos y podría ocurrir en el peor de los casos que pasen justo entre los puntos de  $S_d$ . Por esa razón, estos puntos se distribuyen en varias circunferencias uniformemente concéntricas dentro de  $V_{R,|},d$ .

Por tanto, para construir el conjunto  $S_d$  se empieza definiendo el anillo redondo  $V_{R,|},d$ . Este se subdivide luego en  $s$  sub anillos, cada uno de estos

estará acotado por dos circunferencias de la forma  $\left(\frac{d-1}{d}\right)^{\frac{1}{s}}$ , donde  $s > 1$ .

Para que el módulo de cada uno de estos sub anillos sea independiente del grado, elegimos  $s = r \ln d$ , para algún  $r > 0$ , y dentro de cada sub anillo (en realidad en la curva central de cada sub anillo) colocamos  $s d \ln d$  puntos por circunferencia, con  $s > 0$ . Entonces  $\#S_d = r s d \ln^2 d$ . Las cantidades  $r$  y  $s$  se relacionan del siguiente modo (ver (Hubbard, Schleicher, & Sutherland, 2001)):

Sea  $P := e^{2f^\dagger}$ ,  $M(\dagger) := \frac{B(P)}{2A(P)}$ , donde

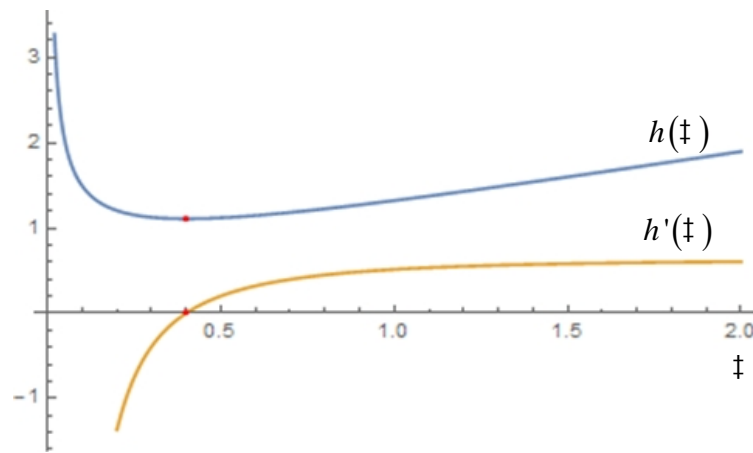
$$A(P) := \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{z(1-z)(P-z)}} dz ; B(P) := \int_1^P \frac{1}{\sqrt{z(z-1)(P-z)}} dz \quad (3.5)$$

Entonces  $r := \frac{M(\dagger)}{f}$  y  $S := \frac{2M(\dagger)}{|\dagger|} = \frac{2rf}{|\dagger|}$ .

Por consiguiente,  $\#S = \frac{2M^2(\dagger)}{f|\dagger|} d \ln^2 d$ . Empleando integración numérica

para calcular  $A(P)$  y  $B(P)$ , la cantidad  $h(\dagger) := \frac{2M^2(\dagger)}{f\dagger}$  tiene la gráfica

mostrada en la Figura 3-4, donde aparece junto a su derivada.



**Figura 3-4 Estimación del mínimo cardinal de  $S_d$**

El mínimo ocurre en el punto  $(\dagger_0, h(\dagger_0)) = (0.399881, 1.10861)$  por lo que

$\#S_d \approx \frac{1.10861}{|\dagger|} d \ln^2 d$ . Dado que  $\lim_{R \rightarrow \infty} |\dagger| = 1$ , el cardinal mínimo es

aproximadamente  $1.10861 d \ln^2 d$ . No obstante, como ya se comentó, este cardinal no es eficiente pues se requerirá de muchas iteraciones para llegar a las raíces, por eso suele tomarse  $|\dagger| = 0.5$ .

Explícitamente, si  $\dagger_0 = 0.399881$  entonces  $r \approx 0.26562$  y  $s = \frac{4.17363}{|}$ . Por

tanto, la construcción de  $S_d$ , que denotaremos con  $HS_d$ , es como sigue:

**Definición 3.3 Construcción de  $HS_d$**

- Elegimos  $R = 1 + \sqrt{2}$ ,  $| = \frac{1}{2}$  y  $\dagger = 0.39988$ , lo cual nos da  $s = \lceil 0.26562 \ln d \rceil$  circunferencias (que son las curvas centrales de los  $s$  sub anillos en los que se divide  $V_{1+\sqrt{2}, \frac{1}{2}, d}$ ) con  $N = \lceil 8.34726 d \ln d \rceil$  puntos cada una.
- En notación exponencial,  $HS_d := \{r_w e^{i\theta_j} : 1 \leq w \leq s \wedge 0 \leq j \leq N-1\}$ , donde  $r_w := (1 + \sqrt{2}) \left( \frac{d-1}{d} \right)^{\frac{2w-1}{4s}}$  y  $\theta_j := \frac{2\pi j}{N}$ .

El cardinal del conjunto  $HS_d$  así construido tiene

$$\lceil 0.26562 \ln d \rceil \lceil 8.34726 d \ln d \rceil \approx \lceil 2.2172 d \ln^2 d \rceil \text{ puntos aproximadamente.}$$

La construcción anterior sólo se preocupa de colocar al menos un punto en cada cuenca de atracción. Como ya se comentó, pudiera ocurrir que alguna de esas órbitas tenga puntos cerca a infinito, lo cual conllevaría a realizar muchas iteraciones hasta alcanzar la raíz buscada o alcanzar el número máximo de iteraciones permitido. La siguiente construcción, expuesta en

(Schleicher, On the efficient global dynamics of Newton's Method for complex polynomials, 2013), forma al conjunto  $S_d$  con puntos contenidos en órbitas centrales. Para lograr el resultado, sólo hay que multiplicar el número de circunferencias en las que se divide el anillo fundamental de la dinámica por un factor de  $\frac{3}{2}$ , ya que cualquier sub canal de cualquier canal tiene un módulo mínimo de  $\frac{2}{3}$  del módulo de dicho canal. De este modo, el número de circunferencias es  $s = \lceil 0.39843 \ln d \rceil \approx \lceil 0.4 \ln d \rceil$ . Dado que  $r := \frac{B(e^{2f\ddagger})}{2f A(e^{2f\ddagger})}$  con  $A$  y  $B$  definidos como en (3.5), empleamos interpolación inversa para resolver  $\frac{B(e^{2f\ddagger})}{2f A(e^{2f\ddagger})} = 0.39843$ , obteniéndose  $\ddagger = 0.8109$ . Entonces el número de puntos por circunferencia es de  $\left\lceil \frac{4rf}{\ddagger} d \ln d \right\rceil = \lceil 6.17423 d \ln d \rceil$ . Al conjunto  $S_d$  así construido lo denotaremos mediante  $SS_d$ .

**Definición 3.4**      **Construcción de  $SS_d$**

$$SS_d := \left\{ r_w e^{i_{r_w} j} : 1 \leq w \leq s \wedge 0 \leq j \leq N-1 \right\}$$

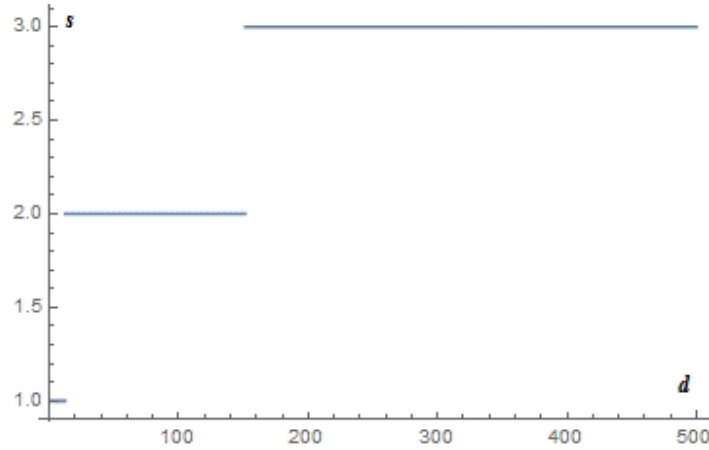
$$\text{donde } s = \lceil 0.39843 \ln d \rceil, \quad N = \lceil 6.17423 d \ln d \rceil, \quad r_w := (1 + \sqrt{2}) \left( \frac{d-1}{d} \right)^{\frac{2w-1}{4s}} \quad y$$

$$i_{r_w} j := \frac{2f j}{N}.$$

De esta forma, el número de puntos del conjunto  $SS_d$  es de aproximadamente

$$\lceil 0.3984 \ln d \rceil \lceil 6.17423 d \ln d \rceil \approx \lceil 2.46 d \ln^2 d \rceil \quad (3.6)$$

Este número es ligeramente mayor al cardinal de  $HS_d$  pero con la seguridad que no vamos a tener órbitas con puntos cercanos a infinito. En la Figura 3-5 se observa que el número de circunferencias varía lentamente. En efecto,  $\lceil 0.3984 \ln d \rceil$  es 1 para  $d \leq 12$ ; 2 para  $13 \leq d \leq 151$ ; 3 para  $152 \leq d \leq 1863$  y así sucesivamente.



**Figura 3-5 Número de circunferencias vs. grado del polinomio**

Como tanto el número de circunferencias como el número de puntos sobre ellas deben ser números enteros, en términos prácticos entonces, escogemos primero el número de circunferencias eligiendo  $r \approx \frac{k}{\ln d}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , recalculamos el número  $\dagger$  mediante interpolación inversa y hallamos luego el número de

puntos sobre cada circunferencia con la expresión  $\left\lceil \frac{4kf d}{\dagger} \right\rceil$ . Al conjunto así

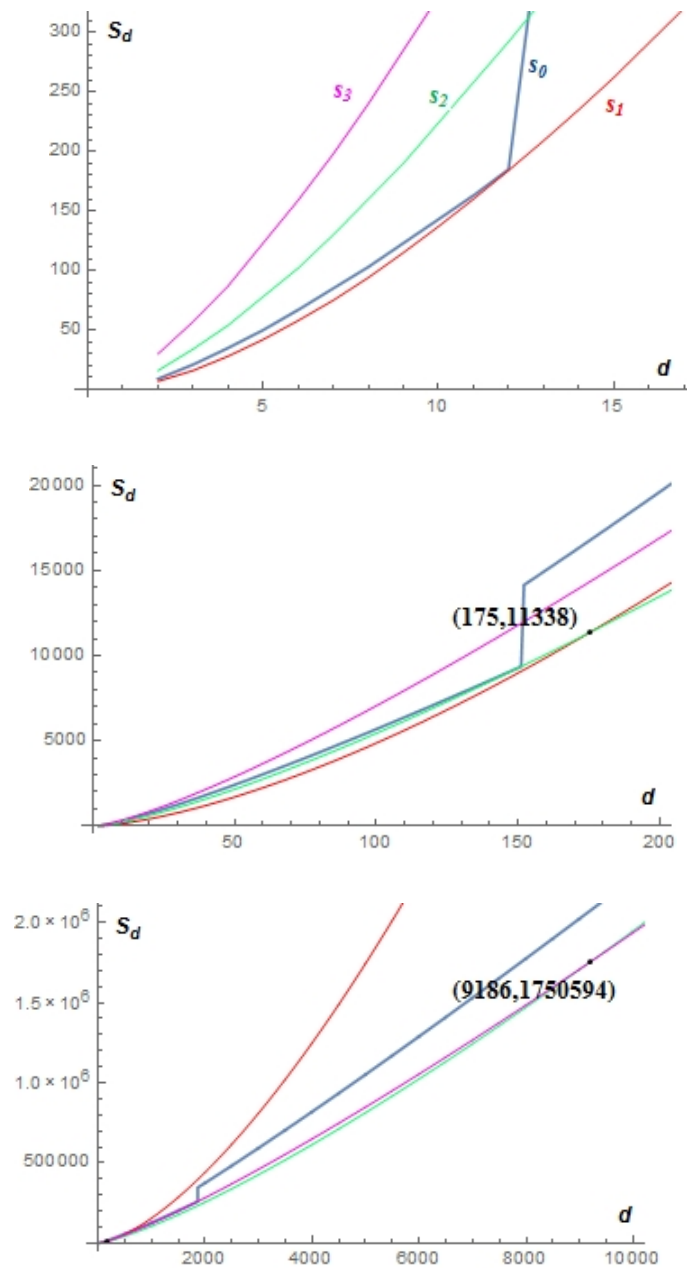
formado lo denotaremos mediante  $SPS_d$  y entonces  $\#SPS_d = k \left\lceil \frac{4kf d}{\dagger} \right\rceil$ .

Los resultados se muestran en la Figura 3-6 para valores  $k = 1, 2$  y  $3$ , donde se han unido los puntos correspondientes a cada valor entero de la variable  $d$  para una mejor visualización.

De este modo,  $s_0, s_1, s_2$  y  $s_3$  son los cardinales de  $SS_d$ , correspondiente a  $\lceil 0.3984 \ln d \rceil$ , y  $SPS_d$  con 1, 2 y 3 circunferencias respectivamente.

Como se observa, es recomendable usar una sola circunferencia para  $2 \leq d \leq 175$ , dos circunferencias para  $176 \leq d \leq 9186$  y así sucesivamente.





**Figura 3-6 Mínimo de circunferencias y puntos en  $S_d$**

La Tabla 3-2 muestra los valores interpolados de  $\ddagger$ , redondeado a tres decimales, en función del grado cuando se usa 1 circunferencia.

**Tabla 3-2 Valores Interpolados de  $\tau$  para una circunferencia**

d	$\tau$	d	$\tau$	d	$\tau$
2	4.09109	31	0.477621	60	0.336165
3	2.41833	32	0.469458	61	0.333277
4	1.82491	33	0.461699	62	0.33046
5	1.51071	34	0.45431	63	0.327713
6	1.31211	35	0.447264	64	0.325034
7	1.17326	36	0.440535	65	0.32242
8	1.06962	37	0.434101	66	0.319867
9	0.98869	38	0.42794	67	0.317375
10	0.923346	39	0.422033	68	0.314939
11	0.869213	40	0.416364	69	0.312559
12	0.82345	41	0.410917	70	0.310233
13	0.784123	42	0.405677	71	0.307957
14	0.749869	43	0.400632	72	0.305731
15	0.71969	44	0.395771	73	0.303552
16	0.692846	45	0.391083	74	0.30142
17	0.668771	46	0.386557	75	0.299331
18	0.647018	47	0.382185	76	0.297286
19	0.627242	48	0.377957	77	0.295282
20	0.609163	49	0.373867	78	0.293318
21	0.592553	50	0.369905	79	0.291392
22	0.577222	51	0.366067	80	0.289504
23	0.563013	52	0.362346	81	0.287651
24	0.5498	53	0.358736	82	0.285833
25	0.537472	54	0.355232	83	0.28405
26	0.525934	55	0.351828	84	0.2823
27	0.515106	56	0.34852	85	0.280581
28	0.504918	57	0.345304	86	0.278894
29	0.495308	58	0.342176	87	0.277236
30	0.486224	59	0.339131	88	0.275608

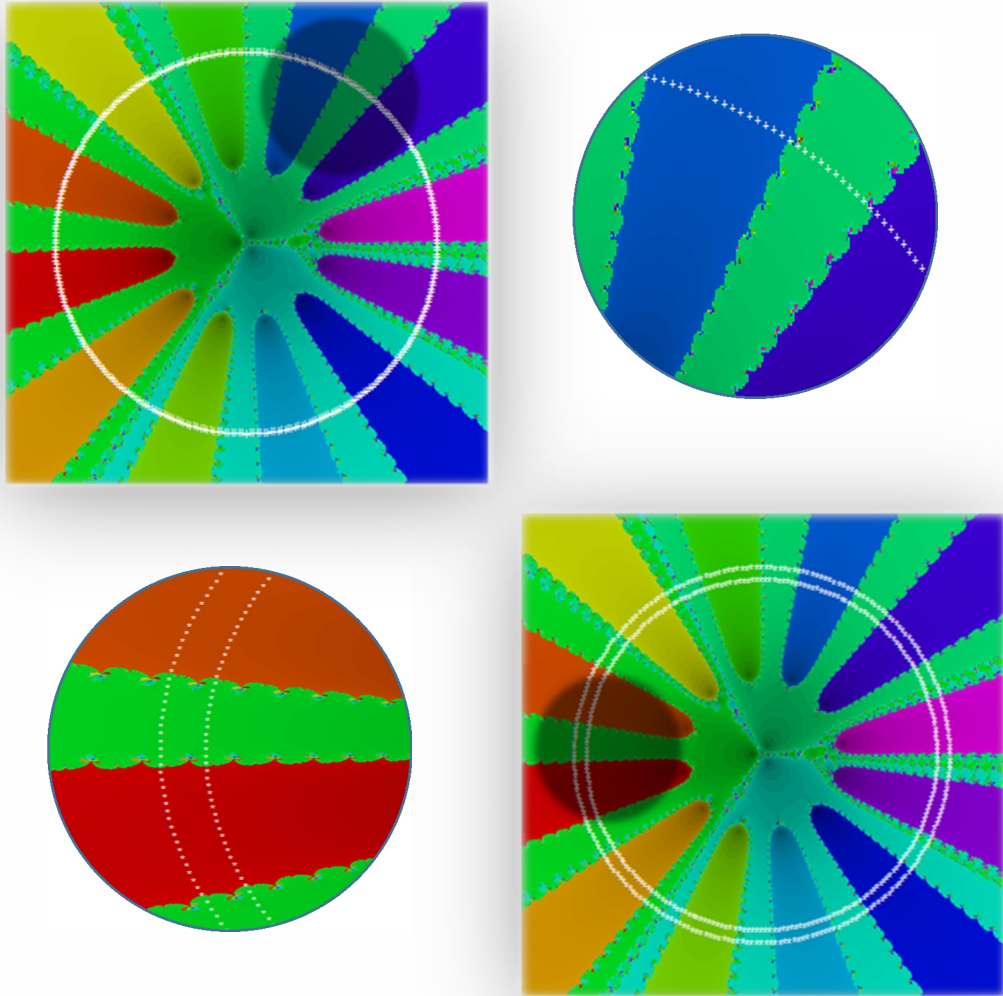
d	$\tau$	d	$\tau$	d	$\tau$
89	0.274008	118	0.237091	147	0.211946
90	0.272436	119	0.23607	148	0.211216
91	0.270891	120	0.235063	149	0.210494
92	0.269372	121	0.234068	150	0.209778
93	0.267878	122	0.233085	151	0.20907
94	0.266408	123	0.232115	152	0.208369
95	0.264963	124	0.231157	153	0.207675
96	0.26354	125	0.230211	154	0.206988
97	0.262141	126	0.229276	155	0.206308
98	0.260763	127	0.228353	156	0.205634
99	0.259407	128	0.22744	157	0.204967
100	0.258072	129	0.226538	158	0.204306
101	0.256758	130	0.225647	159	0.203651
102	0.255463	131	0.224767	160	0.203003
103	0.254188	132	0.223896	161	0.202361
104	0.252932	133	0.223036	162	0.201725
105	0.251694	134	0.222185	163	0.201095
106	0.250474	135	0.221345	164	0.200471
107	0.249271	136	0.220513	165	0.199853
108	0.248085	137	0.219691	166	0.19924
109	0.246917	138	0.218878	167	0.198633
110	0.245764	139	0.218074	168	0.198032
111	0.244628	140	0.217279	169	0.197436
112	0.243507	141	0.216493	170	0.196845
113	0.242401	142	0.215715	171	0.19626
114	0.241311	143	0.214945	172	0.195679
115	0.240235	144	0.214183	173	0.195104
116	0.239173	145	0.21343	174	0.194534
117	0.238125	146	0.212684	175	0.193969

### Ejemplo 3.1

Consideremos el polinomio  $\left((8z)^3 + 1\right) \prod_{r=\frac{1}{47}}^1 \left(z - e^{2\pi i r}\right)$  donde el tamaño de paso

del producto es  $\frac{4}{47}$ . Para este polinomio,  $d = 15$ .

En la Figura 3-7 se muestra el conjunto  $HS_{15}$  y  $SS_{15}$  contruidos en la forma de la Definición 3.3 y Definición 3.4 , respectivamente.



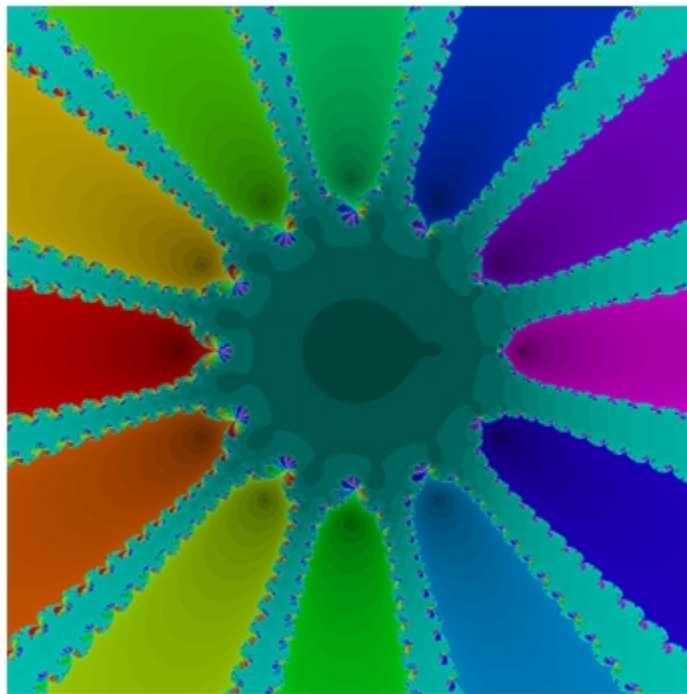
**Figura 3-7 Conjuntos  $HS_{15}$  y  $SS_{15}$**

Como se comentó, en forma práctica se puede hacer una simplificación del cardinal de  $S_{15}$ . Dado que  $d = 15$ , la Tabla 3-2 nos da  $\dagger = 0.71969$ , con lo que el cardinal de  $S_{15}$  es 262 puntos. El  $\#SS_{15} = 502$  y  $\#HS_{15} = 340$ , por lo tanto,  $SPS_{15}$  representa un ahorro del 47.81% y 22.94% de puntos a evaluar.

---

### 3.4 EL ENFOQUE PROBABILÍSTICO

Cuando el grado del polinomio es alto, cuando la cuenca de atracción inmediata tiene muchos canales a infinito o cuando hay muchas raíces cerca a la frontera de  $\mathbb{S}^1$  y unos pocos en  $\mathbb{D}^1$ , ocurre que existen canales a infinito que son muy angostos.



**Figura 3-8 Raíces anchas y delgadas**

Por ejemplo, consideremos el polinomio  $p(z) = (z^{12} - 1)(z - 0.5 - 0.01i)$  cuyas cuencas de atracción se observan en la Figura 3-8 . Las 12 raíces de la unidad están en  $\mathbb{S}^1$  y la raíz restante debe “salir” a infinito a través de canales simplemente conexos y por tanto estos deben ser delgados en las proximidades de  $\mathbb{S}^1$  . Claro que se ensancharán a medida que se alejen de  $\mathbb{S}^1$  , pero no es conveniente alejarse tanto de esa circunferencia. En tal situación, tanto  $HS_d$  y  $SS_d$  colocan al menos un punto dentro de cada canal. En cambio, en el enfoque probabilístico desarrollado en (Bollobás, Lackmann, & Schleicher, 2013) coloca al menos un punto en la unión de dichos canales. Para poder aplicar este enfoque, primero debemos distinguir dos tipos de raíces: las que tienen algún canal lo suficientemente ancho y las que tienen todos sus canales delgados.

### **Definición 3.5**      ***Raíces anchas y delgadas***

*Sea  $M > 0$  . Una raíz  $r$  de  $p$  se denomina raíz ancha si tiene un canal con módulo mayor que  $M$  , caso contrario, se llamará raíz delgada*

Ahora bien, supongamos que tenemos una raíz delgada  $r$  con  $c_r$  accesos a

infinito. Entonces,  $\bigwedge_{1 \leq k \leq c_r} \tilde{\gamma}_k < M$  . Por lo tanto,  $e^{\frac{f}{M}} - 1 < e^{\frac{f}{\tilde{\gamma}_k}} - 1 = \gamma_k - 1$  .

Tomando inversos y luego sumas, se tiene:

$$1 \leq \sum_k \frac{1}{j_k - 1} < \sum_k \frac{1}{e^{\frac{f}{M}} - 1} = \frac{c_r}{e^{\frac{f}{M}} - 1}$$

Por consiguiente,

$$c_r > e^{\frac{f}{M}} - 1 \quad (3.7)$$

Dado que  $U_r$  contiene  $c_r$  de los  $2d - 2$  puntos críticos de  $N_p$ , entonces

$$\sum_{\#r \text{ delgadas}} e^{\frac{f}{M}} - 1 < \sum_{\#r \text{ delgadas}} c_r \leq 2d - 2$$

De este modo, el número de raíces delgadas es menor que  $\frac{2d - 2}{e^{\frac{f}{M}} - 1}$ .

Tomando logaritmos en (3.7),

$$M > \frac{f}{\ln d} \quad (3.8)$$

En caso contrario, todas las raíces serán anchas.

Una vez elegido  $M$ , el enfoque probabilístico consta de dos etapas: primero, la construcción de un conjunto determinístico  $DS_d$  que consta de puntos que están en las cuencas de atracción de raíces anchas y segundo, la construcción de un conjunto probabilístico  $PS_d$  cuyos puntos están en la unión de los canales de las raíces delgadas.

La construcción de  $DS_d$  es similar a la de  $SS_d$  con la diferencia que no se busca colocar puntos en todos los canales de todas las raíces, sino sólo en

los de las raíces anchas. El siguiente resultado, lema 3 de (Bollobás, Lackmann, & Schleicher, 2013), nos muestra cómo se debe llevar a cabo dicha construcción.

#### **Lema 3.4**

*Sea  $B_\zeta$  un canal de  $U_\Gamma$ . Si  $V_{R,|,d}$  se subdivide en al menos  $\frac{2}{M}$  sub anillos concéntricos y conformemente equivalentes, y como mínimo  $4fd \left\lceil \frac{2}{M} \right\rceil$  puntos son colocados en las curvas centrales de cada sub anillo de modo que los puntos en todas estas circunferencias estén igualmente distribuidos, entonces la parte del canal  $B_\zeta$  en  $V_{R,|,d}$  con módulo de al menos  $M$  contiene como mínimo uno de tales puntos.*

#### **Definición 3.6 Construcción de $DS_d$**

*La parte determinística del enfoque probabilístico es*

$$DS_d := \left\{ r_w e^{i\pi j} : 1 \leq w \leq s \wedge 0 \leq j \leq N-1 \right\}$$

$$\text{donde } s = \left\lceil \frac{2}{M} \right\rceil, N = \left\lceil 4fd \left\lceil \frac{2}{M} \right\rceil \right\rceil, r_w := (1 + \sqrt{2}) \left( \frac{d-1}{d} \right)^{\frac{2w-1}{4s}} \text{ y } \pi_j := \frac{2fj}{N}.$$



De este modo, el cardinal del conjunto  $DS_d$  es

$$\left\lceil 4fd \left\lceil \frac{2}{M} \right\rceil \right\rceil \left\lceil \frac{2}{M} \right\rceil \approx \left\lceil \frac{16fd}{M^2} \right\rceil \quad (3.9)$$

Consideremos ahora las raíces delgadas.

Sea  $R \geq 5$ ,  $A_R := \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{d-1}{d}R - \frac{1}{d} < |z| < R \right\}$  y  $r$  una de tales raíces con

$c_r$  canales  $B_k$ , cada uno con módulo  $\gamma_k = \frac{f}{\gamma_k - 1}$ ,  $1 \leq k \leq c_r$ .

Se sabe que si

$$\bigwedge_{1 \leq k \leq c_r} \gamma_k < M < \frac{f}{\ln 4} \quad (3.10)$$

entonces  $\sum_{k=1}^{c_r} \gamma_k > \frac{1}{2} M e^{\frac{f}{M}}$ ; además  $\text{Área}(A_R \cap B_k) \geq \gamma_k \left[ \frac{(R-1)(R-3)}{2d(R+1)} \right]^2$ ,

lema 6 y 8 respectivamente de (Bollobás, Lackmann, & Schleicher, 2013)).

Entonces, el área de la intersección de todos los canales de  $U_r$  con  $A_R$  es

$$\sum_{k=1}^{c_r} \text{Área}(A_R \cap B_k) \geq \left[ \frac{(R-1)(R-3)}{2d(R+1)} \right]^2 \sum_{k=1}^{c_r} \gamma_k > \frac{M e^{\frac{f}{M}}}{2} \left[ \frac{(R-1)(R-3)}{2d(R+1)} \right]^2$$

Además,

$$\text{Área}(A_R) = f \left( R^2 - \left( \frac{d-1}{d}R - \frac{1}{d} \right)^2 \right) = \frac{f(R+1)(2Rd - (R+1))}{d^2} < \frac{2fR(R+1)}{d}$$

Entonces la probabilidad  $p$  de que un punto en  $A_R$  escogido al azar esté en algún  $B_k$  es

$$p = \frac{\sum_{k=1}^{c_r} \text{Área}(A_R \cap B_k)}{\text{Área}(A_R)} > \frac{Me^{\frac{f}{M}}}{2} \left[ \frac{(R-1)(R-3)}{2d(R+1)} \right]^2 \frac{d}{2fR(R+1)}$$

Simplificando el lado derecho de esta desigualdad, denotemos el resultado con

$$p_{\min} := \frac{Me^{\frac{f}{M}} (R-1)^2 (R-3)^2}{16f d R (R+1)^3} \quad (3.11)$$

Supongamos que vamos a distribuir suficientes  $N$  puntos en  $A_R$  en forma independiente y aleatoria. La probabilidad de que ninguno de estos puntos esté en algún  $B_k$  es  $(1-p)^N < (1-p_{\min})^N$ .

Consideremos ahora a todas las raíces delgadas. Suponiendo el peor de los casos, el número de tales raíces es a lo más  $d$ , por lo que la probabilidad de que exista una raíz delgada cuyos canales no contengan a ninguno de los puntos es menor que  $d(1-p_{\min})^N$ .

Escojamos una probabilidad  $\mathbb{E}$ ,  $0 < \mathbb{E} < 1$ , y examinemos al evento  $E$  que consiste en que cada raíz delgada contenga al menos uno de los  $N$  puntos en su cuenca inmediata. Queremos que  $\Pr(E) \geq \mathbb{E}$ . Dado que  $\mathbb{E}$  es arbitrario,

$\Pr(E^C) > d(1-p_{\min})^N$ , es decir,  $d(1-p_{\min})^N < 1-\mathbb{E}$ , de donde

$$N > \frac{\ln\left(\frac{1-\mathbb{E}}{d}\right)}{\ln(1-p_{\min})} = \frac{\ln(1-\mathbb{E}) - \ln d}{\ln(1-p_{\min})} \quad (3.12)$$

ya que  $\ln(1-p_{\min}) < 0$ .

Dado que, en particular para  $0 < x < 1$ ,  $\ln(1-x) < -x < 0$ , (3.12) se transforma en

$$N > \frac{\ln(1-\mathbb{E}) - \ln d}{\ln(1-p_{\min})} > \frac{\ln(1-\mathbb{E}) - \ln d}{-p_{\min}} = \frac{|\ln(1-\mathbb{E})| + \ln d}{p_{\min}}$$

y sustituyendo (3.11) se llega a

$$N > \frac{16f d (|\ln(1-\mathbb{E})| + \ln d)}{Me^{\frac{f}{M}}} \frac{R(R+1)^3}{(R-1)^2 (R-3)^2} \quad (3.13)$$

De este modo, (3.13) nos dice que para que  $\Pr(E) \geq \mathbb{E}$ , basta tomar

$$N = \left\lceil \frac{16f d (|\ln(1-\mathbb{E})| + \ln d)}{Me^{\frac{f}{M}}} \frac{R(R+1)^3}{(R-1)^2 (R-3)^2} \right\rceil \quad \text{puntos aleatoria e}$$

independientemente distribuidos en  $A_R$ .

Se suelen hacer algunas elecciones  $M, \mathbb{E}$  y  $R$  para simplificar (3.13).

Por ejemplo, se suele tomar  $R=11$  (para evitar errores de redondeo) y

$\mathbb{E} = 1 - \frac{1}{d}$ , pues es natural elegir  $\mathbb{E}$  muy cercano a 1 y este es justamente el

límite de  $1 - \frac{1}{d}$  cuando  $d \rightarrow \infty$ , con lo cual se tiene  $\frac{R(R+1)^3}{(R-1)^2(R-3)^2} = 2.97$ ,

de donde

$$N > \frac{16 \times 2.97 f d \left( \left\lfloor \ln \left( \frac{1}{d} \right) \right\rfloor + \ln d \right)}{M e^{\frac{f}{M}}} = \frac{298.58 d \ln d}{M e^{\frac{f}{M}}}$$

es decir, podemos tomar

$$N = \left\lceil \frac{300 d \ln d}{M e^{\frac{f}{M}}} \right\rceil \quad (3.14)$$

Para distribuir esta cantidad de puntos en forma aleatoria e independiente utilizaremos la forma exponencial de los números complejos.

Definamos el anillo  $A_{r_1, r_2} := \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z| < r_2\}$ . Para escoger aleatoriamente

el punto  $z_0 = r_0 e^{i\theta_0} \in A_{r_1, r_2}$ , tomemos un punto  $\theta_0$  en forma aleatoria en el

intervalo  $[0, 2\pi]$ . No obstante, no puede hacerse lo mismo con el radio. Para

hacerlo adecuadamente, debemos notar que el elemento diferencial de área

en coordenadas polares es  $dA = r dr d\theta$ , de modo que la probabilidad de que

un punto esté en dicha área es proporcional a  $r$ . Sea  $f(r) := k r$  dicha

probabilidad,  $k > 0$ . Por definición de probabilidad,  $\int_{r_1}^{r_2} k r dr = 1$ , de donde

$$k = \frac{2}{r_2^2 - r_1^2}, \text{ quedando}$$

$$f(r) = \frac{2}{r_2^2 - r_1^2} r \quad (3.15)$$

La función de distribución acumulada de (3.15) es  $F(x) = \frac{2}{r_2^2 - r_1^2} \int_{r_1}^x r dr$ , cuya

inversa es

$$r = \sqrt{F(r)(r_2^2 - r_1^2) + r_1^2} \quad (3.16)$$

Con todo lo comentado, la construcción del conjunto probabilístico  $PS_d$  usado para hallar las raíces delgadas es como sigue:

**Definición 3.7 Construcción de  $PS_d$**

Consideremos el anillo  $A_{11} := \left\{ z \in \mathbb{C} : 11 - \frac{12}{d} < |z| < 11 \right\}$ . Sean  $a$  y  $b$  dos números aleatorios del intervalo  $[0, 1]$ . Entonces

$$PS_d := \left\{ \frac{1}{d} \sqrt{12a(22d - 12) + (11d - 12)^2} e^{i2fb} \right\}$$

donde la elección de  $a$  y  $b$  se realiza  $N = \left\lceil \frac{300d \ln d}{Me^{\frac{f}{M}}} \right\rceil$  veces.

Adicionando a (3.14) el cardinal (3.9), tenemos que el enfoque probabilístico usa una cantidad de puntos aproximadamente de

$$\#S_d = \left\lceil 4fd \left\lceil \frac{2}{M} \right\rceil \right\rceil \left\lceil \frac{2}{M} \right\rceil + \left\lceil \frac{300d \ln d}{Me^{\frac{f}{M}}} \right\rceil \approx \left\lceil \frac{16fd}{M^2} \right\rceil + \left\lceil \frac{300d \ln d}{Me^{\frac{f}{M}}} \right\rceil \quad (3.17)$$

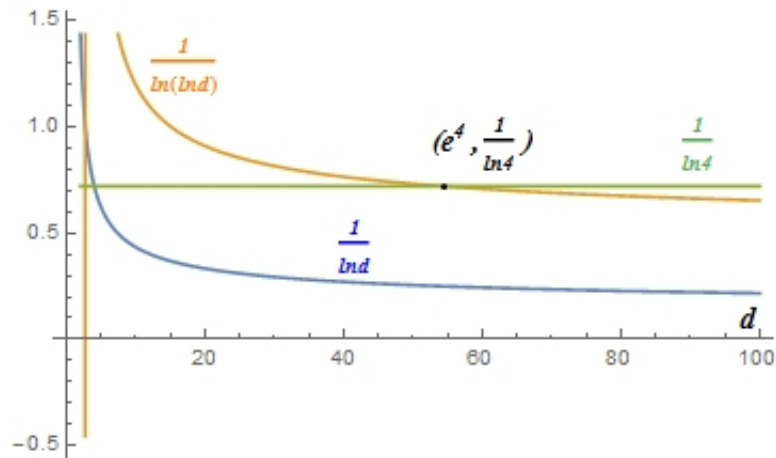
para hallar todas las raíces de  $p$  con una probabilidad de  $1 - \frac{1}{d}$ . En realidad,

$\#S_d$  es menor que (3.17) ya que  $DS_d$  y  $PS_d$  no son necesariamente disjuntos.

Ahora, de (3.8) y (3.10),  $\frac{f}{\ln d} < M < \frac{f}{\ln 4}$ , de modo que una elección natural

para  $M$  es  $\frac{f}{\ln(\ln d)}$ . La Figura 3-9 muestra que el valor mínimo de  $d$  para

el cual esta elección funciona es  $d = e^4 \approx 54.5981$ , es decir,  $d = 55$ .

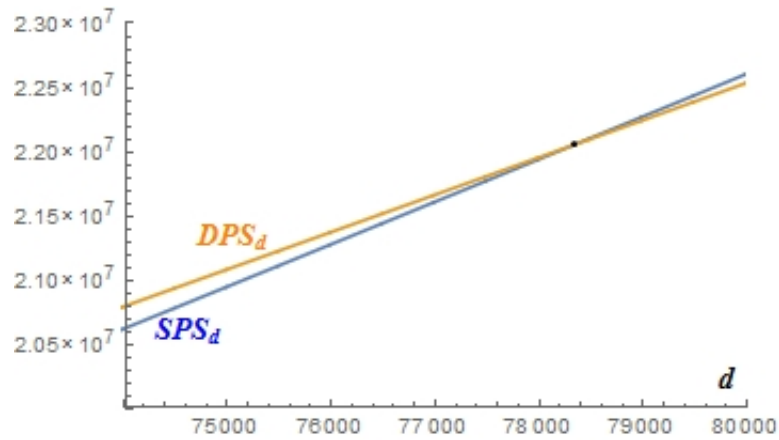


**Figura 3-9 Valor mínimo del grado  $d$  para la elección  $M=1/\ln(\ln d)$**

Con este valor, (3.17) queda en la forma

$$\begin{aligned} \#DPS_d &= \left\lceil 4f d \left\lceil \frac{2 \ln(\ln d)}{f} \right\rceil \right\rceil \left\lceil \frac{2 \ln(\ln d)}{f} \right\rceil + \left\lceil \frac{300d \ln(\ln d)}{f} \right\rceil \\ &\approx \left\lceil \frac{16d \ln^2(\ln d)}{f} \right\rceil + \left\lceil \frac{300d \ln(\ln d)}{f} \right\rceil \end{aligned} \quad (3.18)$$

De este modo, el enfoque probabilístico aquí expuesto se puede aplicar a partir de un polinomio de grado 55. Pero, al reemplazar  $d = 55$  en (3.6) se tiene que  $\#SS_{55} = 2722$ ; en la forma práctica,  $\#SPS_{55} = 1965$ ; y en (3.18), se tiene que  $\#DPS_{55} = 7983$ . Resulta natural preguntarse entonces, a partir de qué grado se cumple que  $\#DPS_d < \#SPS_d$ .



**Figura 3-10 Cardinales de  $SPS_d$  y  $DPS_d$**

El punto de intersección de los cardinales de  $SPS_d$  y  $DPS_d$  en la Figura 3-10 tiene coordenadas  $(78330, 22053978)$ . De este modo, a partir del valor  $d = 78330$  el enfoque probabilístico tiene una cantidad de puntos menor que el determinístico. Recordemos que para los grados entre 2 y 175 se utiliza

$SPS_d$  con una circunferencia; con dos circunferencias entre 176 y 9 186; y con tres desde 9187 hasta 78 329.

No obstante, hay que tener en cuenta que una menor cardinalidad de  $PS_d$  no necesariamente significa una mejora en la eficiencia del método ya que los puntos de  $PS_d$  están más lejos de  $\mathbb{D}^1$ . Incrementar el radio del dominio fundamental de  $R_1$  a  $R_2$  implica un incremento de aproximadamente

$d \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right)$  en el número de iteraciones que se requieren para lograr llegar a la

raíz (Hubbard, Schleicher, & Sutherland, 2001).

### 3.5 EL ENFOQUE HÍBRIDO

Una perspectiva alterna, expuesta en (Schleicher & Stoll, Newton's Method in practice: Finding all roots of polynomials of degree one million efficiently, 2015), que combina ambos enfoques consiste en elegir aleatoriamente una cantidad de puntos (llamada generación 0) en una circunferencia de un disco que contenga a las raíces. Aplicamos  $N_p$  a estos puntos. Si aún quedan raíces por hallar, giramos la generación 0 (obteniendo así la generación 1) y repetimos el proceso.

Primero, formaremos un conjunto híbrido determinístico en el sentido que los puntos de la generación 0 no se colocan en forma aleatoria sino mediante una regla definida: entre cada dos puntos de la generación anterior, colocamos un punto de la nueva justo en la mitad de su arco de circunferencia.



Como  $\text{grad}(p) = d$ , empezamos colocando  $d$  puntos.

**Definición 3.8 Construcción de  $HDS_d$**

Sea

$$G_{r,0} := \left\{ re^{\frac{2\pi k}{d}i} : k = 0, \dots, d-1 \right\} \quad (3.19)$$

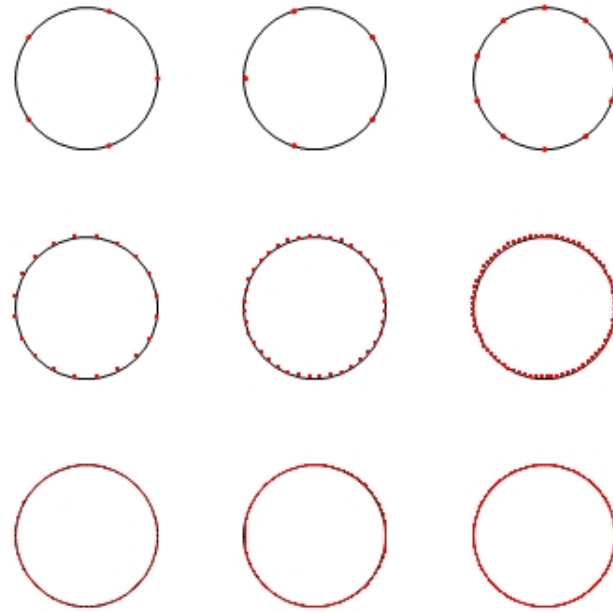
el conjunto de  $d$  puntos distribuidos uniformemente sobre una circunferencia centrada en el origen y de radio  $r$  que contenga a las raíces de  $p$ .  $G_{r,0}$  se denomina la generación 0 de  $HDS_d$ . Definimos la  $n$ -ésima generación mediante

$$G_{r,n} := \left\{ re^{\left(\frac{f k}{2^{n-2}d} + \frac{f}{2^{n-1}d}\right)i} : k = 0, \dots, 2^{n-1}d-1 \right\} \quad (3.20)$$

Entonces,  $HDS_d := \bigcup_{n \geq 0} G_{r,n}$ , donde la unión va desde la generación 0 hasta aquella que sea necesaria para hallar todas las raíces de  $p$ .

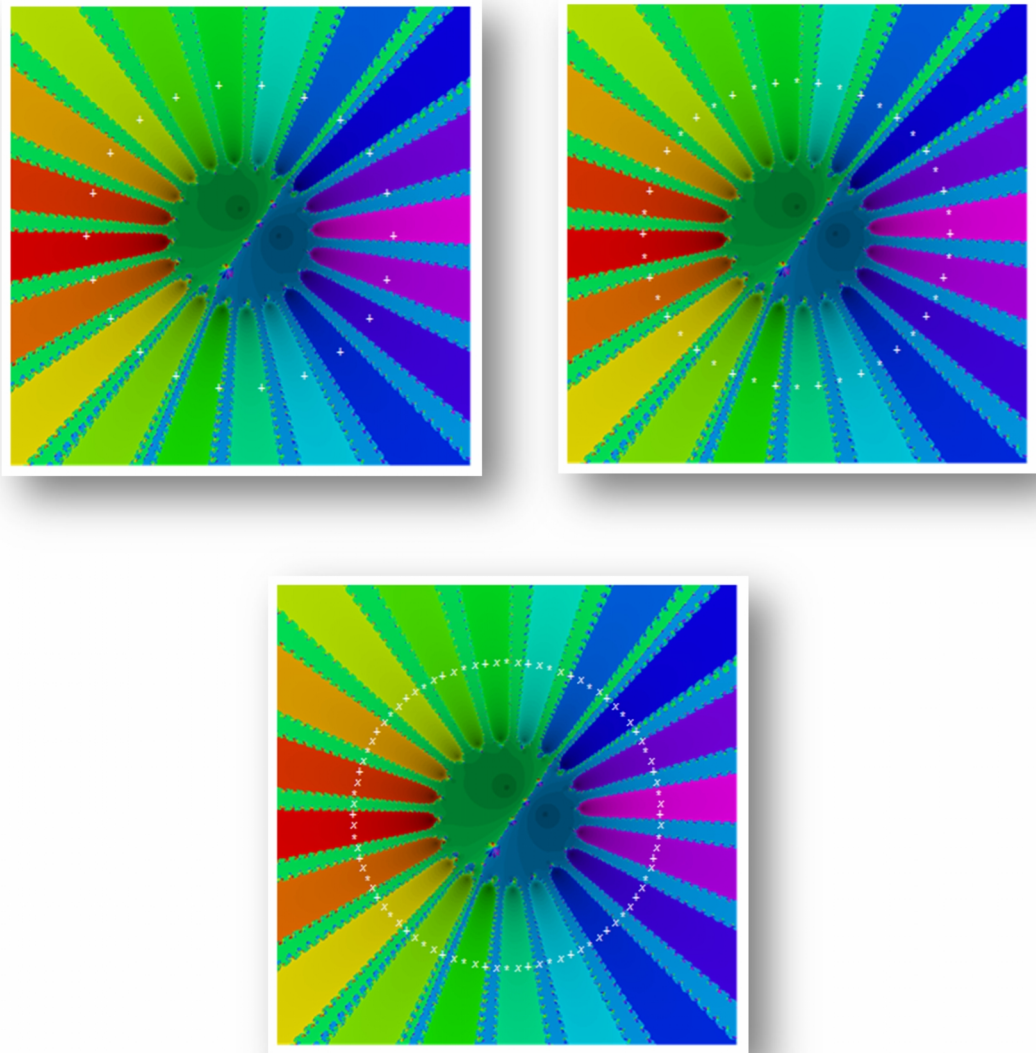
De este modo, el cardinal de  $HDS_d$  es variable. Esto es una ventaja pues no todos los puntos de los conjuntos semillas definidos en las secciones previas

se utilizan para calcular las raíces. Al conjunto  $HDS_d$  también se le llama *el conjunto diádico de inicialización de Newton*.



**Figura 3-11** *Diversas generaciones del conjunto  $HDS_d$ . Observe que los puntos de una generación son diferentes de los de la anterior*

Claramente el conjunto  $HDS_d$  es denso en la circunferencia donde se colocan sus puntos. En la se muestran tres generaciones en el cálculo de las raíces de  $p(z) = (z^{20} - 1)(z - 0.5)(z - 0.35i)$ . Observar basta sólo la generación 0 y 1 para hallar todas las raíces.



**Figura 3-12 Generación inicial y dos primeras generaciones del conjunto  $HDS_{22}$**

Otra versión de este enfoque es colocar  $d$  puntos iniciales pero en forma aleatoria. Si no se encuentran todas las raíces, colocamos puntos adicionales aleatoriamente en una cantidad igual que en  $HDP_d$ .

**Definición 3.9 Construcción de  $HPS_d$**

Sea

$$G_{r,0} := \{re^{2fki}\} \quad (3.21)$$

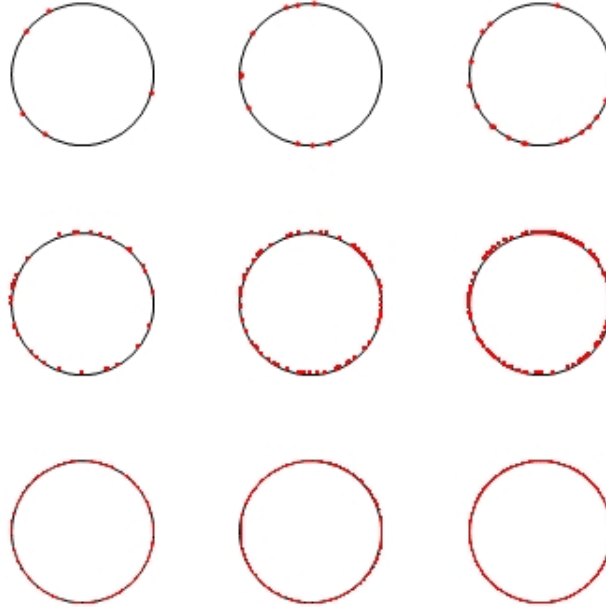
, donde  $k \in [0,1]$  es un número aleatorio que se escoge  $d$  veces. Definimos

la  $n$  – ésima generación mediante

$$G_{r,n} := \{re^{2fki}\} \quad (3.22)$$

, donde la elección de  $k$  se realiza  $2^{n-1}d$  veces. Entonces,  $HPS_d := \bigcup_{n \geq 0} G_{r,n}$ ,

donde la unión va desde la generación 0 hasta aquella que sea necesaria para hallar todas las raíces de  $p$ .



**Figura 3-13 Diversas generaciones del conjunto  $HPS_d$ .**

# CAPÍTULO 4

## EL ALGORITMO

### 4.1 INTRODUCCIÓN

Con todo lo expuesto en los capítulos anteriores, estamos en condiciones de implementar el algoritmo del método de Newton para polinomios de una variable compleja. Para que dicho algoritmo sea eficiente, se necesita tener una estimación de su coste computacional así como de disponer de criterios de detención para evitar desbordamientos. Así mismo, el algoritmo debe ser capaz de detectar raíces con multiplicidad mayor a 1 y también saber distinguir cuándo una órbita converge a una raíz que ya se calculó previamente. Todas estas cuestiones se abordan en este capítulo.

### 4.2 CONSTRUCCIÓN DEL ALGORITMO

En lo sucesivo,  $p \in \mathbb{C}[z]$  con raíces no necesariamente dentro de  $\mathbb{D}^1$ . A continuación, se detallan los pasos de la construcción del algoritmo que hemos llamado AlgNewton.

#### 4.2.1 Elaboración del conjunto semilla $S_d$

Emplearemos una versión ligeramente diferente de  $HDS_d$ : calculamos la generación 0 y en vez de aplicar el método de Newton a todos los puntos de esa generación, iremos aplicando uno por uno cuidando dos aspectos: primero, que el número de raíces halladas (contando multiplicidades) sea menor que el grado del polinomio; y segundo, que la órbita futura de cada punto de la generación no aproxime a una raíz ya hallada. Si la generación 0 no es suficiente para hallar todas las raíces, recién pasamos a la segunda generación y procedemos de forma similar. Se ha preferido  $HDS_d$  a los demás conjuntos semillas, pues en estos se deben calcular todos los puntos y luego aplicarles el mapeo de Newton. Como es de esperar, no se utilizan todos los puntos. Aunque esto ya se había visto en la elaboración de  $SPS_d$ , este conjunto tiene la misma desventaja, pues su cardinal es menor que  $HSS_d$  y  $SSD_d$  sólo porque se considera una cantidad prefijada de circunferencias.

Otra ventaja de  $HDS_d$  frente a los demás conjuntos de inicialización es que los puntos se encuentran colocados en una sola circunferencia y no en varias ( $HSS_d$  y  $SSD_d$ ) o en un anillo ( $DPS_d$ ). De este modo se evita el tener puntos más alejados de  $\mathbb{D}^1$  que otros.

El código es el siguiente:

```

Options[HDS] = {RadioRaices → Automatic}
HDS[d_Integer?(#1 ≥ 2 &), numberGen_?(#1 ≥ 0 &), opts___] :=
Module[{r, radio, Gen},
  {radio} = {RadioRaices} /. Flatten[{opts}] /. Options[HDS] /.
    Automatic → 1;
  If[numberGen == 0, Gen = Table[radio e $\frac{2fk i}{d}$ , {k, 0, d - 1}],
    Gen = Table[radio e $\left(\frac{f k}{d 2^{\text{numberGen}-2} + \frac{f}{d 2^{\text{numberGen}-1}}\right) i}$ , {k, 0, d 2numberGen-1 - 1, 1} ]];
  Gen]

```

#### 4.2.2 Normalización de las raíces del polinomio

Para llevar un polinomio  $p \in \mathbb{P}_d$  a  $\mathbb{P}_d^1$ , usaremos (2.39). No obstante, existen test específicos para polinomios con características particulares (capítulo 5 de (Barbeau, 1989)<sup>4</sup>). Por esa razón, se incluye en las opciones de AlgNewton la modificación del factor de normalización. Por defecto, se usa la normalización expuesta en el Ejemplo 1.2.

```

Options[AlgNewton] = {NormalizationFactor → Automatic...}
normFactor = NormalizationFactor /. {opts} /. Options[AlgNewton];
coeffs = CoefficientList[poly, var];
{maxRootRadius} = {NormalizationFactor} /. Flatten[{opts}] /.
  Options[AlgNewton] /. Automatic → Max[Abs[Drop[cfs, -1] / Last[cfs]]] + 1;
p[z_] = poly /. var → maxRootRadius * z

```

---

<sup>4</sup> Por ejemplo, si los coeficientes del polinomio son todos positivos, el módulo de las raíces está entre el mínimo y el máximo de los coeficientes del polinomio divididos entre el coeficiente principal.

### 4.2.3 Detección de la multiplicidad de la raíz

Usualmente las raíces de  $p \in \mathbb{P}_d^1$  se encontrarán antes de usarse todos los puntos de  $S_d$ . Es importante entonces conocer la multiplicidad  $m$  de una raíz ya hallada para así sólo buscar las  $d - m$  raíces faltantes. Hay dos formas de hacerlo. Una de ellas es el hecho de que el radio de convergencia de la órbita indica la multiplicidad de la raíz.

Consideremos al polinomio  $p(z) = z^m$ . Entonces

$$N_p(z) = z - \frac{z^m}{mz^{m-1}} = \left( \frac{m-1}{m} \right) z$$

Entonces

$$N_p^n(z) = \left( \frac{m-1}{m} \right)^n z \quad (3.23)$$

Para calcular el radio de convergencia de la órbita de  $z_0$ , necesitamos tres iterados:  $z_n := N_p^n(z_0)$ ,  $z_{n+1}$  y  $z_{n+2}$ .

Sea  $r_{n+1,n} := |z_{n+1} - z_n|$ . De (3.23) tenemos

$$\dots := \frac{r_{n+1,n}}{r_{n+2,n+1}} = \left| \frac{m}{m-1} \right| = \frac{m}{m-1} \quad (3.24)$$

Y entonces  $m = 1 + \frac{1}{\dots - 1}$ . No obstante, el cociente en (3.24) no siempre será

tal que  $m$  resulte entero, por eso se toma



$$m = 1 + \sqrt{\frac{1}{\dots - 1}} \quad (3.25)$$

En general, para cualquier polinomio, la expresión (3.25) oscilará cuando ...

varíe. Tomamos entonces la frecuencia de la sucesión  $\left\{ 1 + \sqrt{\frac{1}{\dots - 1}} \right\}_{\dots=1}^{\#orbit^+(z_0)}$ .

La multiplicidad viene dada por el valor de (3.25) con mayor frecuencia.

```

cp = Compile[{{z, _Complex}}, p[z]];
cpp = Compile[{{z, _Complex}}, Evaluate[p'[z]]];
newton = Compile[{{z, _Complex}}, Evaluate[z - p[z] / p'[z]]];
mult[z0_Complex] := If[newton[z0] == z0, 1,
  mult[FixedPointList[newton, z0, 1000]]]
mult[orbit_List] := Module[{f, div, diffs},
  f[x_] := If[x != 1.0, 1/(x - 1)];
  div[{a_, b_}] := If[b != 0, a/b];
  diffs = Abs[(#[[2]] - #[[1]]) & / @Partition[Drop[orbit, -1], 2, 1]];
  Frecuencia[Round[f / @ (div / @ Partition[diffs, 2, 1])] + 1 / .Round[_] -> 0]]

```

```

Frecuencia[list_?(VectorQ[#1] && Length[#1] > 0 &)] := Module[{a, b, c},
  a = {Length[#], First[#]} & /@ Split[Sort[list]];
  If[Length[a] == 1, Return[a[[1, 2]]]; b = Max[First[Transpose[a]]];
  If[b == 1, Return[{ }]; c = Cases[a, {b, val_] -> val];
  If[Length[c] == 1, c[[1]], c[[1]]];

```

El otro mecanismo para hallar  $m$  es observar a  $N_p'$ . Sea  $z = r$  una raíz con

multiplicidad  $m$ . Entonces  $p(z) = (z - r)^m Q(z)$  con  $Q(r) \neq 0$ . Luego

$$\begin{aligned} p'(z) &= m(z-r)^{m-1} Q(z) + (z-r)^m Q'(z) \\ &= (z-r)^{m-1} [mQ(z) + h(z)] \end{aligned}$$

, donde  $h(r) = 0$ . Además,

$$\begin{aligned} p''(z) &= m(m-1)(z-r)^{m-2} Q(z) + m(z-r)^{m-1} Q'(z) + \\ &\quad m(z-r)^{m-1} Q'(z) + (z-r)^m Q''(z) \\ &= (z-r)^{m-2} [m(m-1)Q(z) + h_1(z)] \end{aligned}$$

, donde  $h_1(r) = 0$ . Si tenemos una órbita convergente a  $z=r$  se cumple que

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow r} N_p'(z) &= \lim_{z \rightarrow r} \frac{p(z)p''(z)}{(p'(z))^2} \\ &= \lim_{z \rightarrow r} \frac{(z-r)^m Q(z) [(z-r)^{m-2} [m(m-1)Q(z) + h_1(z)]]}{((z-r)^{m-1} [mQ(z) + h(z)])^2} \\ &= \lim_{z \rightarrow r} \frac{Q(z) [m(m-1)Q(z) + h_1(z)]}{(mQ(z) + h(z))^2} = \frac{m-1}{m} \end{aligned}$$

Entonces,

$$m = \frac{1}{1 - \lim_{z \rightarrow r} N_p'(z)}$$

La parte de AlgNewton que calcula multiplicidades viene dada por el siguiente código

```

newton2 = Compile[{{z, _Complex}}, Evaluate[p[z] p'[z] / (p'[z]^2)];
mult1[z0_Complex] := Module[{g}, g[x_] := If[x ≠ 1., 1 / (1 - Abs[x]), 0];
Round[g[Limit[newton2[z], z → z0]]];
mult1[Null] := 0;

```

Null corresponde al último valor de una órbita que ha sido descartada.

#### 4.2.4 Criterios de detención

El algoritmo distingue dos casos: cuando se alcanza la precisión deseada y cuando se llega a un tope de iteracciones sin alcanzar la precisión deseada.

En la tolerancia usamos por defecto la precisión de la máquina:

```

Options[AlgNewton] = {ErrorTolerance → $MachineEpsilon...}
{tol} = {ErrorTolerance} /. {opts} /. Options[AlgNewton];

```

Para el número máximo de iteracciones, en (Hubbard, Schleicher, &

Sutherland, 2001) se sugiere utilizar  $\left\lceil d \ln \left( \frac{R}{tol} \right) \right\rceil$  como máximo de

iteracciones ( $R$  es el radio donde se colocan los punto del conjunto semilla).

Por defecto,  $R = 1$ .

```

Options[AlgNewton] = {RootsRadius → Automatic...}
{radiohds} = {RootsRadius} /. Flatten[{opts}] /. Options[AlgNewton] /.
Automatic → 1;
maxIters = Ceiling[deg Log[radiohds / tol]];

```

En lo que respecta a los criterios de detención de una órbita, utilizaremos tres de ellos. Sean  $z_{iters-1}$  y  $z_{iters}$  los dos últimos puntos de una órbita que resulta

de aplicar  $iters$  veces el mapeo de Newton a un punto del plano complejo. El primero de estos criterios garantiza exactitud:  $p(z_{iters}) < tol$ ; el segundo y tercero garantizan precisión:  $z_{iters} = z_{iters-1}$  y  $|z_{iters} - z_{iters-1}| < \frac{tol}{d}$  (el segundo se considera en caso de encontrarse un punto fijo).

Cuando el número de iteraciones de una órbita alcanza el máximo permitido y ninguna de estas condiciones se ha satisfecho, la órbita debe ser descartada (en (Hubbard, Schleicher, & Sutherland, 2001) se recomienda guardarlos en nuevo conjunto semilla; en lugar de eso, descartamos la órbita e intentamos en otro punto o en la siguiente generación). Las siguientes instrucciones permiten elegir entre  $z_{iters-1}$  y  $z_{iters}$  como candidatos a aproximar una raíz de  $p$ .

```
orbit11[x_] := Module[{orbita, nextRoot1, orbita1, orbita2, iter},
  orbita = NestWhileList[newton, x,
    (Abs[cp[#1]] ≥ tol & #1 ≠ #2 && Abs[#1 - #2] ≥ tol / deg) &, 2, maxIters];
  {orbita1, orbita2, iter} = {orbita[[1]], orbita[[2]], Length[orbita] - 1};
  If[iter == maxIters,
    If[Abs[cp[orbita1]] < tol || orbita1 == orbita2 || Abs[orbita1 - orbita2] < tol / deg,
      nextRoot1 = orbita1, nextRoot1 = Null;],
    If[Abs[cp[orbita1]] < tol || orbita1 == orbita2 || Abs[orbita1 - orbita2] < tol / deg,
      nextRoot1 = orbita1, nextRoot1 = orbita2; iter = iter - 1];
  {nextRoot1, iter}];
```

#### 4.2.5 Detección de aproximaciones duplicadas

Aquí consideramos dos casos según la multiplicidad. Para  $m = 1$  utilizaremos el criterio expuesto en (Kim & Sutherland, 1994) (el cual aparece con el nombre de *function weed-out-duplicates*):

$$\begin{aligned} \text{sameRootQ2}[z1\_ , z2\_ , 1] &:= \text{If} \left[ \text{Abs}[\text{cp}[z1]] \geq \text{Abs}[\text{cp}[z2]], \right. \\ &\quad \text{Abs}[z2 - z1] \leq \text{Abs} \left[ 3\text{cp}[z1] / \text{cpp}[z1] \right], \\ &\quad \left. \text{Abs}[z2 - z1] \leq \text{Abs} \left[ 3\text{cp}[z2] / \text{cpp}[z2] \right] \right] \end{aligned}$$

Para  $m \geq 2$  emplearemos una heurística basada en la convergencia lineal del mapeo de Newton alrededor de una raíz con multiplicidad mayor que 2:

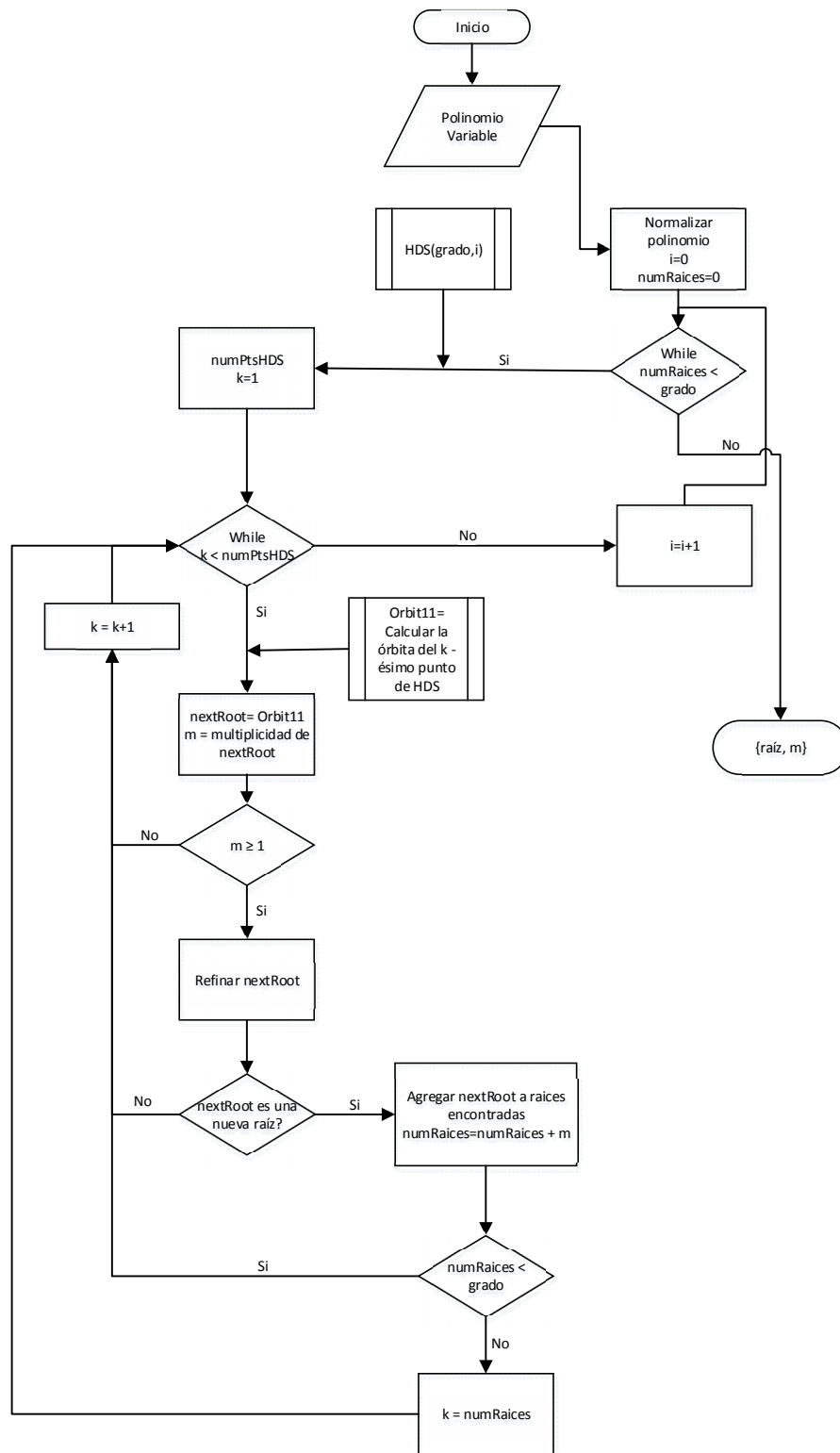
$$\begin{aligned} \text{sameRootQ2}[z1\_ , z2\_ , mm\_ /; mm > 1] &:= \text{Abs}[\text{Re}[z1] - \text{Re}[z2]] < \text{tol} / \text{deg} \\ &\quad \& \& \text{Abs}[\text{Im}[z1] - \text{Im}[z2]] < \text{tol} / \text{deg}; \end{aligned}$$

Las siguientes instrucciones distinguen si una aproximación a una raíz ya ha sido encontrada o no.

$$\begin{aligned} \text{newRootQ}[z\_ , mm\_ ? (\#1 \geq 1 \&) ] &:= \\ \text{Module}[\{ \text{justRootsSoFar}, \text{flag} \}, \text{flag} = \text{True}; \\ \text{justRootsSoFar} &= \text{Cases}[\text{rootsSoFar}, \{a\_ , mm\} \rightarrow a]; \\ \text{Scan}[\text{IF}[\text{sameRootQ}[\#, z, mm], \text{Return}[\text{flag} = \text{False}], \&], \text{justRootsSoFar}]; \\ \text{flag} \end{aligned}$$

#### 4.2.6 Aspectos adicionales

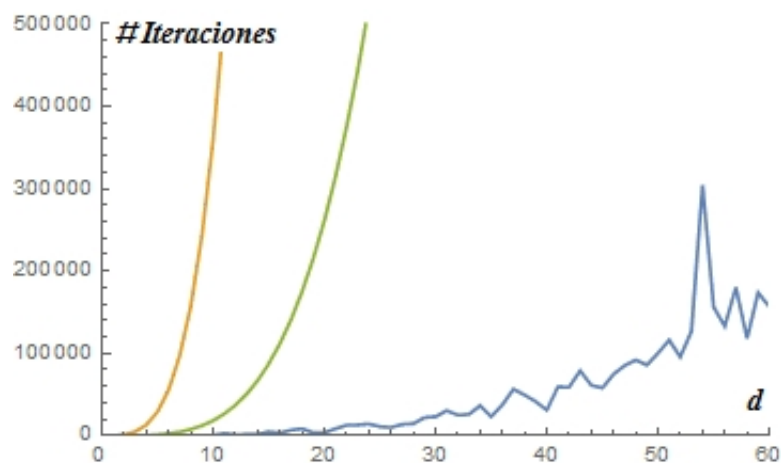
El siguiente diagrama de flujo muestra la secuencia lógica de AlgNewton . En el proceso refinamiento, si la multiplicidad es 1, se itera el  $N_p$  hasta encontrar un punto fijo o alcanzar el máximo de iteraciones permitido. Si la multiplicidad es mayor que 1, se realiza el paso anterior pero con el mapeo de Newton aplicado a  $p^{(m-1)}$ .



**Figura 4-1 Diagrama de flujo de AlgNewton**

### 4.3 ESTIMACIÓN DE LA COMPLEJIDAD COMPUTACIONAL

En (Schleicher, On the efficient global dynamics of Newton's Method for complex polynomials, 2013) se demuestra que la complejidad promedio y en el peor de los casos de  $SS_d$  es  $O(d^3 \ln^3 d + d \ln(|\ln tol|))$  y  $O(d^4 \ln^2 d + d^3 \ln^2 d |\ln tol|)$  respectivamente (la complejidad promedio para polinomios con coeficientes elegidos arbitrariamente). Se eligieron al azar coeficientes en el rectángulo con vértices opuestos  $-2-2i$  y  $2+2i$  para formar 59 polinomios de grado 2 a 59. En la Figura 4-2 se comparan las complejidades computacionales para estos polinomios.



Línea Naranja: Complejidad de  $SS_d$  en el peor de los casos.

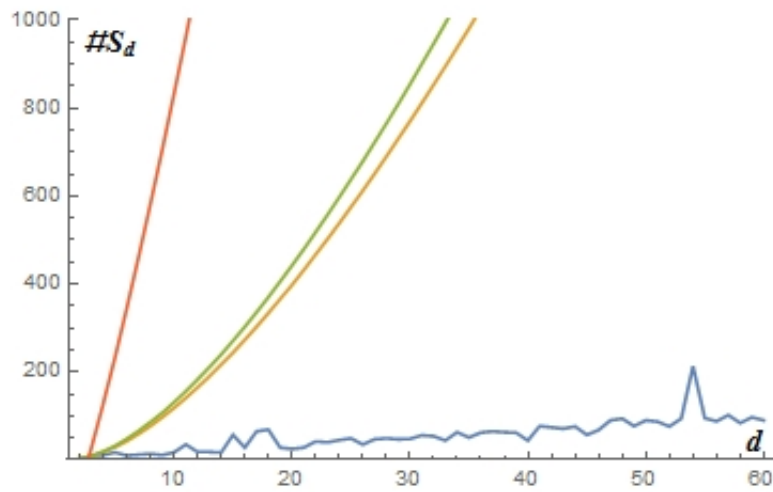
Línea verde: Complejidad promedio de  $SS_d$  con coeficientes elegidos arbitrariamente.

Línea azul: Complejidad de  $HSD_d$

**Figura 4-2 Complejidades computacionales de  $SS_d$  y  $HSP_d$**

Una estimación para la complejidad de  $HDS_d$  es  $83.938d^2 - 2267.2d + 13727 \approx O(d^2)$ .

En lo que respecta al número de puntos requeridos para hallar todas las raíces del polinomio, la Figura 4-3 compara los cardinales de los diferentes conjuntos de inicialización estudiados en el capítulo 3.



Línea Roja : # PDS<sub>d</sub>  
 Línea Verde : # SS<sub>d</sub>  
 Línea Naranja : # HS<sub>d</sub>  
 Línea Azul : # HDS<sub>d</sub>

**Figura 4-3 Comparación de cardinales de diferentes definiciones de  $S_d$**

Una estimación para el cardinal del conjunto  $HDS_d$  es  $0.0045d^2 + 1.4441d + 6.1586 \approx O(d^2)$ .



## CONCLUSIONES

1. Existen polinomios con conjuntos abiertos de inicialización en los cuales las órbitas no convergen a ninguna raíz.
2. En los exteriores del disco unitario, el comportamiento del mapeo de Newton es prácticamente lineal, lo cual permite tener buen control sobre los puntos del conjunto de inicialización.
3. En el interior del disco unitario, es posible mantener el control sobre los iterados que pertenezcan a órbitas  $R$  – centrales.
4. Las cuencas de atracción inmediatas de una raíz son simplemente conexas y no acotadas.
5. El número de accesos a infinito de la cuenca de atracción inmediata de una raíz viene dado por el número de puntos críticos, contado multiplicidades, en dicha cuenca.
6. Para un valor adecuado del módulo del canal de una raíz, existen raíces delgadas y gruesas; y se cumple que la suma de módulos de los canales de las raíces delgadas es mayor que la de las gruesas.
7. Existen 6 formas diferentes de construir un conjunto de inicialización que nos permiten hallar todas las raíces de un polinomio dado.

8. El cardinal del conjunto de inicialización del enfoque híbrido determinista es la de menor cardinal y generalmente más eficiente que las demás.

## RECOMENDACIONES

1. Estudiar la complejidad de `AlgNewton` con una muestra mayor de polinomios.
2. Optimizar el cálculo de la multiplicidad en el código de `AlgNewton`.
3. Encontrar un criterio de decisión adecuado para multiplicidad mayor que dos que permita distinguir dos órbitas diferentes.
4. Encontrar la complejidad en el peor de los casos de los enfoques híbridos.

## ANEXO

### EL ALGORITMO AlgNewton

Las siguientes líneas corresponden al comando AlgNewton implementado en Mathematica 10.0. Las instrucciones han sido explicadas en el capítulo 4.

```
Options[AlgNewton] = {NormalizationFactor → Automatic,  
  ErrorTolerance → $MachineEpsilon, RootsRadius → Automatic};  
  
AlgNewton[poly_, var_, opts___] :=  
Module[{coeffs, deg, maxRootRadius, tol, p, cpk, cp, cpp,  
  cpk1, newton, newton2, newton3, mult1, sameRootQ, newRootQ,  
  rootsSoFar, radiohds, maxIters, countIters, countPoints,  
  orbit11, numRootsSoFar, initPoints, numInitPoints,  
  numIters, nextRoot, m, k, i},  
coeffs = CoefficientList[poly, var];  
deg = Length[coeffs] - 1;  
{maxRootRadius} =  
  {NormalizationFactor} /. Flatten[{opts}] /.  
    Options[AlgNewton] /.  
      Automatic → Max[Abs[Drop[coeffs, -1] / Last[coeffs]]] + 1;  
{tol} = {ErrorTolerance} /. {opts} /. Options[AlgNewton];
```

```

p[z_] = poly /. var → maxRootRadius * z;
cpk[z0_, n_] := Nest[D[#1, z] &, p[z], n] /. z → z0;
cp = Compile[{{z, _Complex}}, p[z]];
cpp = Compile[{{z, _Complex}}, Evaluate[p'[z]]];
cpk1 = Compile[{{z0, _Complex}, {k, _Integer}}, cpk[z0, k]];
newton = Compile[{{z, _Complex}}, Evaluate[z - p[z] / p'[z]]];
newton2 = Compile[{{z, _Complex}},
  Evaluate[p[z] p'[z] / (p'[z])^2]];
newton3 = Compile[{{z, _Complex}, {n, _Integer}},
  z - cpk1[z, n - 1] / cpk1[z, n]];
mult1[z0_] := Module[{g, mm, mm1},
  g[x_] := If[x ≠ 1., 1 / (1 - Abs[x])];
  {mm} = Map[If[NumberQ[#], Round[#], -1] &,
    {g[Limit[newton2[z], z → z0] // N // Quiet]}]; mm
];

sameRootQ[z1_, z2_, 1] :=
  If[Abs[cp[z1]] ≥ Abs[cp[z2]],
    Abs[z1 - z2] ≤ Abs[3 cp[z1] / cpp[z1]],
    Abs[z2 - z1] ≤ Abs[3 cp[z2] / cpp[z2]]];
sameRootQ[z1_, z2_, mm_ /; mm > 1] :=
  Abs[Re[z1] - Re[z2]] < tol / deg &&
  Abs[Im[z1] - Im[z2]] < tol / deg;
newRootQ[z_, mm_? (#1 ≥ 1 &)] :=
  Module[{justRootsSoFar, flag}, flag = True;
  justRootsSoFar = Cases[rootsSoFar, {a_, mm} → a];
  Scan[If[sameRootQ[#, z, mm], Return[flag = False]] &,
    justRootsSoFar]; flag;
  rootsSoFar = {}; numRootsSoFar = 0;

```

```

{radiohds} =
  {RootsRadius} /. Flatten[{opts}] /. Options[AlgNewton] /.
    Automatic → 1;
maxIters = Ceiling[deg Log[ratiohds / tol]];
orbit11[x_] :=
  Module[{orbita, nextRoot1, orbital, orbita2, iter},
    orbita = NestWhileList[newton, x,
      (Abs[cp[#1]] ≥ tol && #1 ≠ #2 && Abs[#1 - #2] ≥ tol / deg) &,
      2, maxIters];
    {orbital, orbita2, iter} =
      {orbita[[-1]], orbita[[-2]], Length[orbita] - 1};
    If[iter == maxIters,
      If[Abs[cp[orbital]] < tol || orbita2 == orbital ||
        Abs[orbital - orbita2] < tol / deg,
        nextRoot1 = orbital, nextRoot1 = Null;
      ],
      If[Abs[cp[orbital]] < tol || orbita2 == orbital ||
        Abs[orbital - orbita2] < tol / deg,
        nextRoot1 = orbital, nextRoot1 = orbita2;
        iter = iter - 1
      ]; nextRoot1];
  i = 0;
  While[numRootsSoFar < deg,
    initPoints = N[HDS[deg, i, {RadioRaices → radiohds}]];
    numInitPoints = Length[initPoints];
    k = 1;
    While[k < numInitPoints,
      numIters = 0;
      nextRoot = orbit11[initPoints[[k]]];
      m = mult1[nextRoot];

```

```

If[m ≥ 1,
  If[m == 1, nextRoot = FixedPoint[newton, nextRoot, maxIters],
    nextRoot = FixedPoint[newton3[#1, m] &, nextRoot,
      maxIters]];
If[newRootQ[nextRoot, m],
  numRootsSoFar = numRootsSoFar + m;
  rootsSoFar = Append[rootsSoFar, {nextRoot, m}];
  If[numRootsSoFar < deg, k++, k = numInitPoints + 1];
  , k++
],
k++
]
];
i++;
];
Cases[rootsSoFar, {a_, b_} → {a * maxRootRadius, b}] // Chop
]

Options[HDS] = {RadioRaices → Automatic};
HDS[d_Integer? (#1 ≥ 2 &), numberGen_? (#1 ≥ 0 &), opts___] :=
Module[{r, radio, Gen},
  {radio} = {RadioRaices} /. Flatten[{opts}] /. Options[HDS] /.
    Automatic → 1;
  If[numberGen == 0, Gen = Table[radio e^(2 π k i / d), {k, 0, d - 1}],
    Gen =
      Table[
        radio
        e^((π k / (2^(numberGen - 2) * d) + π / (2^(numberGen - 1) * d))
          i), {k, 0, 2^(numberGen - 1) * d - 1, 1}]
      ]; Gen]

```

## Referencias Bibliográficas

- Ahlfors, L., by, w. a., Shishikura, M., & Hubbard, J. (2006). *Lectures on quasiconformal mappings*. Rhode Island: American Mathematical Society. University lecture series vol 38.
- Barbeau, E. (1989). *Polynomials*. New York: Springer Verlag.
- Beardon, A. (2000). *Iteration of rational functions*. Cambridge: Springer Science & Business Media.
- Benedetti, R., & Petronio, C. (2003). *Lectures on hyperbolic geometry*. Berlín: Springer.
- Bollobás, B., Lackmann, M., & Schleicher, D. (2013). A small probabilistic universal set of starting points for finding roots of complex polynomials by Newton's method. *Mathematics of Computation*. Vol 82, Number 281, 443-457.
- Cayley, A. (1879). The Newton - Fourier Imaginary Problem. *American Journal of Mathematics*.
- Chapra, S., & Canale, R. (2007). *Métodos Numéricos Para Ingenieros*. México: McGraw Hill.
- Grillet, P. A. (2007). *Abstrac Algebra*. New York: Spriger Science + Business Media, LLC.
- Hubbard, J., Schleicher, D., & Sutherland, S. (2001). How to Really Find Roots of Polynomials by Newton's Method. *Inventiones Mathematicae* 146, 1-33.
- Jenkins, J. (1958). *Univalent functions and conformal mapping*. Berlín: Springer - Verlag.
- Kim, M.-H., & Sutherland, S. (1994). Polynomial Root - Finding Algorithms and Branched Covers. *SIAM Journal on Computing*. Vol 23, No. 2, 415-436.
- Marden, M. (2014). *Geometry of Polynomials. Volume 3 of Matematical Surveys*. Rhode Island: American Mathematical Society.
- McMullen, C. (1987). Families of rational maps and iterative root - finding algorithms. *Annals of Mathematics*, 125, 467 - 493.
- Milnor, J. (2006). *Dynamics in One Complex Variable*. New Jersey: Princenton University Press.
- Nevanlinna, R., & Paatero, V. (1982). *Introduction to Complex Analysis*. London: Chelsea Publishing Company.



- Plaza Salinas, S. (2013). *Dinámica del Método de Newton*. La Rioja: Universidad de La Rioja, Servicio de Publicaciones.
- Ralston, A., & Rabinowitz, P. (2001). *A first course in numerical analysis*. New York: Dover Publications.
- Schleicher, D. (2013). *On the efficient global dynamics of Newton's Method for complex polynomials*. Obtenido de <http://arxiv.org/pdf/1108.5773v2.pdf>.
- Schleicher, D., & Stoll, R. (2015). *Newton's Method in practice: Finding all roots of polynomials of degree one million efficiently*. Obtenido de <http://arxiv.org/pdf/1508.02935v1.pdf>.